

Diskrete Optimierung von Wellendigitalfiltern, insbesondere von Brücken-Wellendigitalfiltern mit Zweitoradaptoren

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

SINORK NORAYIR GÜLLÜOĞLU
Istanbul

Bochum 1986

Diskrete Optimierung von Wellendigitalfiltern, insbesondere von Brücken-Wellendigitalfiltern mit Zweitoradaptoren

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

SINORK NORAYIR GÜLLÜOĞLU
Istanbul

Bochum 1986

Dissertation eingereicht am: 27. November 1986

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Februar 1987

Referent: Prof. Dr. sc. techn. Dr. h. c. A. Fettweis

Korreferent: Prof. Dr. H. Wupper

Inhaltsverzeichnis	Seite
1. Einleitung	5
2. Einige Ergebnisse aus der Wellendigitalfiltertheorie	8
2.1 Kurzer Überblick über die Grundlagen der Wellendigitalfiltertheorie	8
2.2 Brücken-Wellendigitalfilter	13
2.3 Digitale Realisierungen von Reaktanzen mit Hilfe von Zweitoradaptoren	14
2.3.1 Kaskadierung von Allpaßgliedern erster und zweiter Ordnung	14
2.3.2 Kettenschaltung von Leitungselementen	16
2.3.3 Alternative Realisierungsmöglichkeiten von Reaktanzen mit Hilfe von Zweitoradaptoren	18
2.4 Bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter	24
3. Frequenztransformationen für Wellendigitalfilter	27
3.1 Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation	28
3.2 Tiefpaß-Hochpaß-Transformation	35
3.3 Tiefpaß-Bandpaß-Transformation	36
3.4 Tiefpaß-Bandsperre-Transformation	56
3.5 Beispiele für die Frequenztransformationen	62
4. Diskrete Optimierung von Multipliziererkoeffizienten	68
4.1 Problemstellung	68
4.1.1 Darstellung von Zahlen im Zweierkomplement-Kode	68
4.1.2 Darstellung von Zahlen im CSD-Kode	68
4.1.3 Durchführung der Multiplikation	70
4.1.4 Formulierung des diskreten Optimierungsproblems	75
4.2 Überblick über Lösungsmethoden des diskreten Optimierungsproblems	81

4.3	Beschreibung des diskreten Optimierungsalgorithmus	83
4.4	Berechnung der charakteristischen Funktion von Brücken-Wellendigitalfiltern mit Zweitoradaptoren	89
4.5	Berechnung der Empfindlichkeit der charakteristischen Funktion von Brücken-Wellendigitalfiltern	91
4.6	Rekursive Formeln für die effiziente Berechnung der Übertragungsfunktion von Digitalfiltern für die systematisch geänderten Koeffizientenwerte	95
4.7	Beispiele für die diskrete Optimierung	102
5.	Filterkatalog von bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten	116
5.1	Nützlichkeit des Filterkatalogs mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten	116
5.2	Beschreibung des Filterkatalogs	116
5.3	Benutzung des Filterkatalogs	134
5.3.1	Tiefpässe	134
5.3.2	Hochpässe	135
5.3.3	Weichenfilter	139
5.3.4	Bandpässe	142
5.3.5	Bandsperren	157
6.	Zusammenfassung	159
	Literaturverzeichnis	162
	Anhang	168

1. Einleitung

Wellendigitalfilter (WDF) haben durch ihre hervorragenden Eigenschaften in der digitalen Signalverarbeitung eine große Bedeutung erlangt. Bekanntlich werden diese aus klassischen Filtern hergeleitet, die man als *Referenzfilter* bezeichnet [1-5]. Bei der Herleitung der Wellendigitalfilter werden einige gute Eigenschaften der Referenzfilter beibehalten, wie z.B. Passivität, Stabilität, Empfindlichkeit usw. [5,6]. Wellendigitalfilter werden vorzugsweise aus den beidseitig resistiv abgeschlossenen verlustfreien Zweitoren hergeleitet, um deren gute Empfindlichkeitseigenschaften im Durchlaßbereich auszunutzen. Das hat eine sehr einfache Realisierung der Multiplizierkoeffizienten und einen guten Dynamikbereich zur Folge. Die Stabilität wird unter linearen Bedingungen automatisch gesichert [6]. Ein pseudopassives Wellendigitalfilter ist auch unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte (Runden bzw. Abschneiden, Überläufe) stabil [7], auch bei Betrieb unter Schleifenbedingungen [8]. Die inkrementale Pseudopassivität führt zu Eigenschaften wie Antwortstabilität und Stetigkeit des Übertragungsverhaltens [9,10].

Es existiert eine Fülle von Wellendigitalfilterstrukturen, die aus der klassischen Filtertheorie hergeleitet werden können. Eine wichtige Klasse dieser Strukturen bilden die *Brücken-Wellendigitalfilter* (Brücken-WDF) [11,12], die aus symmetrischen verlustfreien Referenzfiltern in Brückenschaltung hergeleitet werden. Sie haben bekanntlich folgende Eigenschaften:

1. Die Zahl der notwendigen Verzögerungen und Multiplizierkoeffizienten ist gleich dem Grad N der zu realisierenden Übertragungsfunktion, und die Zahl der Addierer ist maximal gleich $(3N + 1)$ [11,15].

2. Für ein Brücken-Wellendigitalfilter existiert eine Vielzahl von äquivalenten Realisierungsmöglichkeiten [11].

3. Falls die Dämpfungsanforderungen zweier Filter spiegelbildlich zu einem Viertel der Betriebsrate liegen, kann die Zahl der Multiplizierer und Addierer unter Benutzung von speziellen Strukturen um mehr als die Hälfte reduziert werden. Solche Strukturen bezeichnet man als *bireziproke* Brücken-Wellendigitalfilter (genauer: Brücken-Wellendigitalfilter mit bireziproker charakteristischer Funktion des Referenzfilters) [13].

4. Falls der Einsatz eines bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters kombiniert wird mit einer Abtastratenänderung um den Faktor 2, dann läßt sich der gesamte Filteraufwand nochmals halbieren [16,17].

5. Es wurden Entwurfsverfahren für Brücken-Wellendigitalfilter entwickelt, deren Brücken Zweige durch Kaskadierung von Allpaßgliedern aufgebaut sind [15]. Mit Hilfe dieser Entwurfsverfahren können solche Brücken-Wellendigitalfilter ohne Kenntnis der klassischen Filtertheorie direkt entworfen werden.

Durch diese Eigenschaften spielen Brücken-Wellendigitalfilter für den Einsatz von Wellendigitalfiltern eine große Rolle. Im Kapitel 2 dieser Arbeit werden zunächst einige Ergebnisse aus der Wellendigitalfiltertheorie rekapituliert und ein kurzer Überblick über Brücken-Wellendigitalfilter gegeben. Einige alternative Realisierungsmöglichkeiten von Reaktanzen werden vorgestellt, deren Wellenflußdiagramme mit Hilfe von Zweitor-Paralleladaptoeren aufgebaut sind.

Im Kapitel 3 werden wir uns mit einigen speziellen Frequenztransformationen befassen, die im Wellenflußdiagramm eines passend gewählten Tiefpasses direkt durchführbar sind. Zunächst werden wir die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation für einige Wellenflußdiagramme durchführen. Bei der Anwendung dieser Transformation auf bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter werden $(N - 1)/2$ Zweitor-Paralleladaptoren mit dem jeweils gleichen Multipliziererkoeffizienten γ eingesetzt, wobei N der Grad der Übertragungsfunktion ist. Für diesen Adaptorkoeffizienten werden wir einen zulässigen Bereich angeben, aus dem jeder beliebige Wert die angegebenen Dämpfungsanforderungen des Tiefpaß-Tiefpaß transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters erfüllt. Damit werden $(N - 1)/2$ Multipliziererkoeffizienten beim Entwurf direkt diskret optimiert. Weiterhin werden wir Tiefpaß-Hochpaß-, Tiefpaß-Bandpaß- und Tiefpaß-Bandsperre-Transformationen [22-26] für Wellendigitalfilter untersuchen. Für die Tiefpaß-Hochpaß-Transformation wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des passend gewählten Tiefpasses durch ein Verzögerungselement mit einem Vorzeichenumkehrer (Inverter) ersetzt. Für die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des passend gewählten Tiefpasses durch zwei Verzögerungselemente, einen Vorzeichenumkehrer und einen Zweitor-Paralleladaptor ersetzt. Für die Tiefpaß-Bandsperre-Transformation wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des passend gewählten Tiefpasses durch zwei Verzögerungselemente und einen Zweitor-Paralleladaptor ersetzt. Die Multipliziererkoeffizienten γ der bei der Tiefpaß-Bandpaß- oder Tiefpaß-Bandsperre-Transformation eingesetzten Zweitor-Paralleladaptoren haben jeweils den gleichen Wert. Für diesen Koeffizienten γ werden wir wiederum einen zulässigen Bereich angeben, aus dem jeder beliebige Wert die angegebenen Dämpfungsanforderungen des Bandpasses oder der Bandsperre erfüllt. Dadurch kann für diese Koeffizienten auf sehr einfache Weise ein diskret optimierter Wert bestimmt werden. Mit Hilfe der oben genannten Frequenztransformationen kann der Entwurf eines Hochpasses, Bandpasses oder einer Bandsperre mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten auf den Entwurf eines passend gewählten Tiefpasses mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten zurückgeführt werden.

Da die Multipliziererkoeffizienten eines Wellendigitalfilters in digitaler Form realisiert werden müssen, sollten sie in möglichst optimal quantisierter Form ermittelt werden. Daher ist die diskrete Optimierung der Multipliziererkoeffizienten eines Digitalfilters unverzichtbar. Besonders wichtig ist die diskrete Optimierung der Multipliziererkoeffizienten für Brücken-Wellendigitalfilter, da sonst die höhere Empfindlichkeit der Koeffizienten im Sperrbereich zu einem höheren Realisierungsaufwand der Multiplizierer führen könnte [11]. Für die diskrete Optimierung soll ein geeignetes Gütekriterium zugrunde gelegt werden. Dieses Gütekriterium hängt direkt von den Realisierungsmöglichkeiten der Multiplizierer ab, ein wichtiges Gütekriterium ist z.B., die Gesamtzahl der Addierer bzw. Subtrahierer, die für die Durchführung der Multiplikationen benötigt werden, möglichst gering zu halten. Es gibt bis heute keine allgemeine analytische Methode für die Lösung der diskreten Optimierungsaufgaben. Daher ist die diskrete Optimierung mit großem Rechenaufwand verbunden, und die Ermittlung eines globalen Optimums kann nicht allgemein garantiert werden.

Ein großer Teil dieser Arbeit befaßt sich mit der diskreten Optimierung der Multipliziererkoeffizienten von Wellendigitalfiltern. Das Hauptziel ist, einen Optimierungs-

algorithmus zu entwickeln, mit dessen Hilfe die Multipliziererkoeffizienten eines Brücken-Wellendigitalfilters in möglichst optimal quantisierter Form ermittelt werden können. Hierzu sollen die Brücken-Wellendigitalfilter betrachtet werden, deren Brückenzeige durch Kaskadierung von Allpaßgliedern, Kettenschaltung von Leitungselementen oder hiermit verwandter Methoden aufgebaut sind. Ein wichtiger Teil der diskreten Optimierung ist die Berechnung der Übertragungsfunktion. Um den Rechenaufwand zu reduzieren, soll die Übertragungsfunktion möglichst effektiv berechnet werden. Daher werden wir eine Analyse für die Brücken-Wellendigitalfilter unter Berücksichtigung des minimalen Rechenaufwandes durchführen. Weiterhin werden wir ein Verfahren für die effektive Berechnung der Übertragungsfunktion von allgemeinen Digitalfiltern angeben. Mit Hilfe von diesem Verfahren kann die Übertragungsfunktion von Digitalfiltern sehr effektiv berechnet werden, falls die Koeffizientenwerte sich systematisch ändern. Die effektiven Berechnungsmethoden von charakteristischer Funktion von Brücken-Wellendigitalfiltern werden angegeben. Eine weitere Reduzierung des Rechenaufwandes bei der diskreten Optimierung kann durch die Berücksichtigung der Empfindlichkeiten der einzelnen Koeffizienten erzielt werden. Die Grenzen des Suchgebietes im diskreten Parameterraum können durch die Empfindlichkeitsverhältnisse der einzelnen Koeffizienten festgelegt werden. Eine Empfindlichkeitsanalyse vor der diskreten Optimierung ist eine große Erleichterung für die Suche eines diskreten Optimums. Daher werden wir die Empfindlichkeiten der einzelnen Koeffizienten von Brücken-Wellendigitalfiltern untersuchen.

Ein weiterer Teil dieser Arbeit befaßt sich mit der Erstellung eines Filterkatalogs der bireziproken Brücken-Wellendigitalfilter mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten. Aus zwei Gründen hat ein solcher Filterkatalog für den Anwender eine große Bedeutung:

1. Da der Entwurf von Brücken-Wellendigitalfiltern eine gewisse Vertrautheit mit der klassischen Filtertheorie voraussetzt, bedeutet dies für viele Anwender eine erhebliche Erschwernis.

2. Die diskreten Optimierungsprogramme stehen nicht jedem Anwender zur Verfügung.

Für einen solchen Filterkatalog soll eine Beschränkung auf Strukturen erfolgen, die möglichst einfach und modular sind, andererseits aber gestatten, einer großen Palette von in der Praxis auftretenden Filteranforderungen zu genügen. Solche Strukturen sind insbesondere bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter, deren Brückenzeige durch Kaskadierung von Allpaßgliedern aufgebaut sind. Ausgehend von einem Toleranzschema können die im CSD (canonic signed digit) Code diskret optimierten Koeffizientenwerte ohne weitere Berechnung direkt aus dem Katalog entnommen werden. Die Benutzung des Filterkatalogs wird durch verschiedene Hilfsdiagramme erleichtert. Diese Diagramme enthalten die zu dem jeweils unterschiedlichen Realisierungsaufwand und Filtergrad ermittelten minimalen Dämpfungswerte im Sperrbereich in Abhängigkeit von den normierten Grenzfrequenzen. Damit ist der Benutzer in der Lage, aus diesen Hilfsdiagrammen sofort den für die Erfüllung der Dämpfungsanforderungen notwendigen Realisierungsaufwand abzulesen. Ein solcher Filterkatalog bietet dem Anwender ohne Kenntnis der klassischen Filtertheorie einen direkten Zugang zum Entwurf von bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern.

2. Einige Ergebnisse aus der Wellendigitalfiltertheorie

2.1 Kurzer Überblick über die Grundlagen der Wellendigitalfiltertheorie

Die Grundlagen der Wellendigitalfiltertheorie wurden in [1-5] ausführlich untersucht. Hier werden lediglich einige grundlegende Definitionen, einige Elemente der Wellendigitalfilter und die Beschreibung eines Zweitor-Paralleladaptors kurz wiederholt.

Wellendigitalfilter werden aus klassischen Filtern hergeleitet, die als *Referenzfilter* bezeichnet werden [1-5]. Für Referenzfilter wird die Frequenzvariable

$$\psi = \frac{z - 1}{z + 1} = \tanh\left(\frac{pT}{2}\right) \quad , \quad z = e^{pT} \quad (2.1a, b)$$

benutzt, wobei p die übliche komplexe Frequenz, T die Abtastperiode ist. $F = 1/T$ ist die Abtastfrequenz. Für $p = j\omega$ gilt $\psi = j\varphi$, wobei

$$\varphi = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (2.2)$$

ist, d.h., die reelle Frequenz ω im digitalen Bereich entspricht der reellen Frequenz φ im Referenzbereich oder umgekehrt. Wegen der Realisierbarkeitsbedingungen [18] werden als Signalegrößen *Wellen* benutzt, daher werden die Signalflußdiagramme als *Wellenflußdiagramme* bezeichnet [1-5]. Als Wellengrößen werden üblicherweise die *Spannungswellen* benutzt. Wir betrachten ein *Tor* im Referenzfilter (Bild 2.1a).

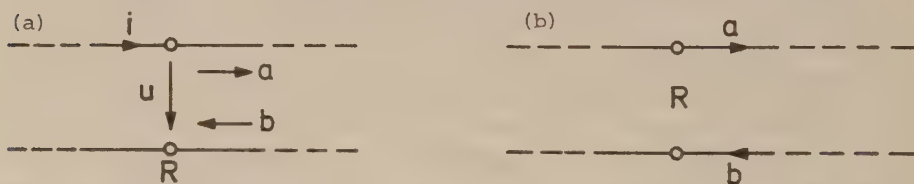


Bild 2.1 (a) Ein Tor mit dem Torwiderstand R , (b) Wellenflußdiagramm eines Tores mit dem Torwiderstand R .

Wir ordnen diesem Tor eine positive Konstante R zu, die die Dimension eines Widerstandes besitzt und als *Torwiderstand* bezeichnet wird. u und i seien die Augenblickswerte der Spannung und des Stromes. Die Spannungswellen sind durch

$$a = u + Ri \quad , \quad b = u - Ri \quad (2.3a, b)$$

definiert, wobei a und b die Augenblickswerte der *einfallenden* bzw. der *reflektierten* Wellen sind (Bild 2.1b). Entsprechend gilt für die komplexen Amplituden der einfallenden und der reflektierten Welle bei stationärem Zustand

$$A = U + RI \quad , \quad B = U - RI \quad (2.4a, b)$$

wobei U und I die komplexen Amplituden der Spannung und des Stromes bei stationärem Zustand sind. In dieser Arbeit werden für die Augenblickswerte der Signalgrößen kleine Buchstaben und für die komplexen Amplituden der Signalgrößen bei stationärem Zustand große Buchstaben benutzt.

Eine *Kapazität* bzw. eine *Induktivität* wird im Referenzfilter durch die Gleichung

$$U = \frac{R_C I}{\psi} \quad \text{bzw.} \quad U = \psi R_L I \quad (2.5a, b)$$

beschrieben (Bild 2.2a,c).

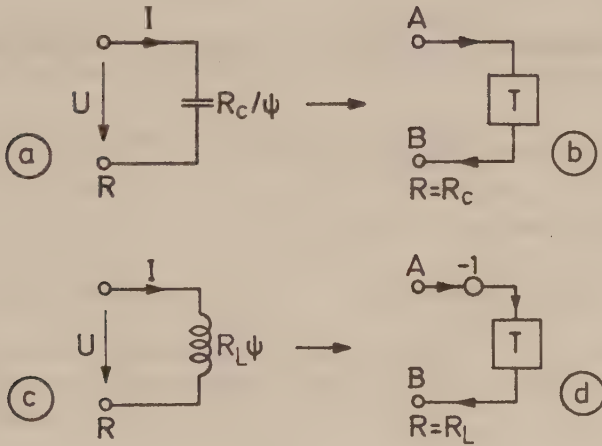


Bild 2.2 (a) Kapazität, (b) Wellenflußdiagramm einer Kapazität, (c) Induktivität, (d) Wellenflußdiagramm einer Induktivität.

Wenn wir den Torwiderstand $R = R_C$ bzw. $R = R_L$ wählen, können die Beziehungen zwischen den Wellengrößen mit Hilfe von (2.1) und (2.4) wie folgt ermittelt werden [2,5]:

$$B = z^{-1} A \quad \text{bzw.} \quad B = -z^{-1} A \quad (2.6a, b)$$

Damit wird eine Kapazität durch ein Verzögerungselement und eine Induktivität durch die Kaskadenschaltung eines Verzögerungselements und eines Vorzeichenumkehrers (Inverters) nachgebildet (Bild 2.2b,d). Ein Kurzschluß im Referenzfilter wird durch einen Vorzeichenumkehrer und ein Leerlauf durch eine Verbindung nachgebildet.

Ein wichtiges Zweitorelement ist das sogenannte *Leitungselement* (unit-element). Bild 2.3 zeigt ein Leitungselement mit dem Wellenwiderstand R .

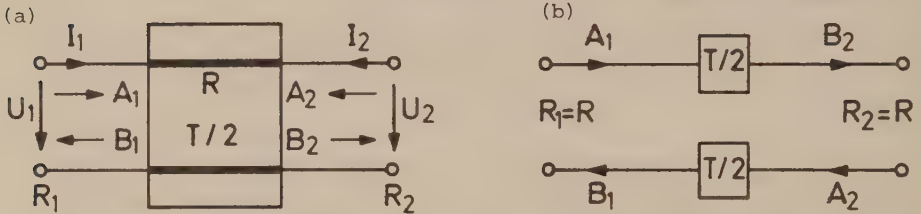


Bild 2.3 (a) Leitungselement, (b) Wellenflußdiagramm eines Leitungselements.

Dieses Zweitor ist durch die Gleichungen

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}}(U_2 - \psi R I_2) \quad , \quad I_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}}\left(\frac{\psi}{R} U_2 - I_2\right) \quad (2.7a, b)$$

beschrieben. Wenn wir die Torwiderstände $R_1 = R_2 = R$ wählen, können die Beziehungen zwischen den Wellengrößen mit Hilfe von (2.1) und (2.4) wie folgt ermittelt werden [2,5]:

$$B_1 = e^{-pT/2} A_2 \quad , \quad B_2 = e^{-pT/2} A_1 \quad . \quad (2.8a, b)$$

Bild 2.3b zeigt das Wellenflußdiagramm eines Leitungselements.

Ein wichtiges nichtreaktives Element ist der *Dreitor-Zirkulator*, der im Referenzfilter durch die Gleichungen

$$R I_1 = U_2 - U_3 \quad , \quad R I_2 = U_3 - U_1 \quad , \quad R I_3 = U_1 - U_2 \quad (2.9a, b, c)$$

beschrieben wird (Bild 2.4a). Wenn wir die Torwiderstände $R_1 = R_2 = R_3 = R$ wählen, erhalten wir mit Hilfe von (2.1) und (2.4) zwischen den Wellengrößen die folgenden Beziehungen [2,5]:

$$B_2 = A_1 \quad , \quad B_3 = A_2 \quad , \quad B_1 = A_3 \quad . \quad (2.10a, b, c)$$

Bild 2.4b zeigt das Wellenflußdiagramm eines Dreitor-Zirkulators.

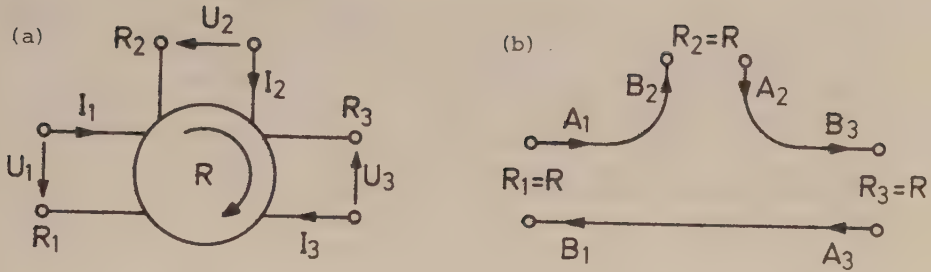


Bild 2.4 (a) Dreitor-Zirkulator, (b) Wellenflußdiagramm eines Dreitor-Zirkulators.

In Bild 2.5 werden zwei äquivalente Wellenflußdiagramme angegeben [5], wobei T_o ein beliebiges Verzögerungselement und N ein beliebiges Wellenflußdiagramm ist.

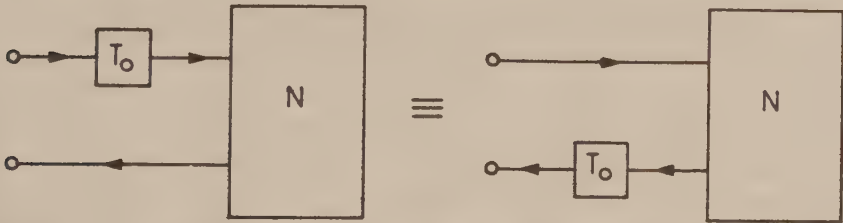


Bild 2.5 Äquivalente Wellenflußdiagramme mit beliebigem Verzögerungselement T_o und beliebigem Wellenflußdiagramm N .

Die digitale Nachbildung eines *Verbindungsmehrtors* erfolgt mit Hilfe von *Adaptoren* [1-5]. Die im Referenzfilter auftretende *n-Tor-Parallelverbindung* (oder *n-Tor-Reihenverbindung*) wird durch einen *n-Tor-Paralleladaptor* (oder *n-Tor-Reihenadaptor*) nachgebildet. Ein *n-Tor-Paralleladaptor* oder *n-Tor-Reihenadaptor* enthält $3n - 3$ Addierer und $n - 1$ Multiplizierer [1-5,19]. Fast alle arithmetischen Operationen eines Wellendigitalfilters, d.h., die Additionen von Signalen und deren Multiplikation mit konstanten Koeffizienten werden in den Adaptoren ausgeführt. Wegen der endlichen Wortlänge der Signale und Koeffizienten werden die Fehler hauptsächlich in den Adaptoren entstehen. Daher haben die Adaptoren für den optimalen Entwurf von Wellendigitalfiltern eine große Bedeutung. Bild 2.6 zeigt die Darstellung eines Zweitor-Paralleladaptors und seine äquivalenten Wellenflußdiagramme. Die Beziehungen zwischen den Wellengrößen sind wie folgt angegeben

[2,19,5]:

$$b_1 = a_2 + \gamma(a_2 - a_1) = b_2 + a_2 - a_1 = a_1 - \gamma''(a_1 - a_2) \quad , \quad (2.11a)$$

$$b_2 = a_1 + \gamma(a_2 - a_1) = b_1 + a_1 - a_2 = a_2 - \gamma'(a_2 - a_1) \quad , \quad (2.11b)$$

wobei

$$\gamma = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \quad , \quad \gamma' = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} \quad , \quad \gamma'' = \frac{2R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.12a, b, c)$$

und

$$\gamma = 1 - \gamma' = \gamma'' - 1 \quad (2.12d)$$

sind.

(a)

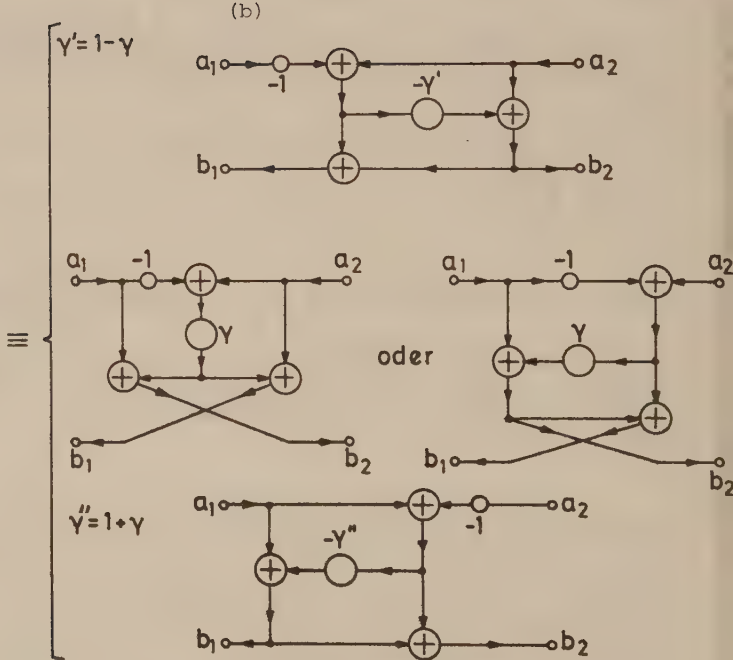
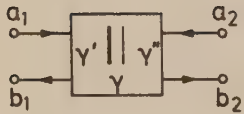


Bild 2.6

(a) Darstellung eines Zweitor-Paralleladaptors, (b) Zugehörige Wellenflußdiagramme.

2.2 Brücken-Wellendigitalfilter

Brücken-Wellendigitalfilter (Brücken-WDF) werden aus symmetrischen verlustfreien Referenzfiltern in Brückenschaltung hergeleitet und sie erfordern im allgemeinen eine geringere Multipliziererzahl als Abzweig-Wellendigitalfilter [11,12]. Die Zahl der notwendigen Verzögerungen und Multiplizierkoeffizienten ist gleich dem Grad N der zu realisierenden Übertragungsfunktion [11]. Wir betrachten das in Bild 2.7 dargestellte symmetrische, resistiv abgeschlossene Zweitor mit den kanonischen Impedanzen Z_1 und Z_2 . Der Quellenwiderstand, der Lastwiderstand und beide Torwiderstände seien R . Die Transmittanz S_{21} und die Reflektanz S_{11} dieses symmetrischen Zweitors können wie folgt bestimmt werden [20]:

$$S_{21} = \frac{2U_2}{E} = \frac{B_2}{A_1} = \frac{S_2 - S_1}{2} \quad , \quad S_{11} = \frac{2U_1 - E}{E} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{S_2 + S_1}{2} \quad , \quad (2.12a, b)$$

wobei

$$S_1 = \frac{Z_1 - R}{Z_1 + R} \quad , \quad S_2 = \frac{Z_2 - R}{Z_2 + R} \quad (2.12c, d)$$

die kanonischen Reflektanzen sind. Wenn Z_1 und Z_2 Reaktanzen sind, dann sind S_1 und S_2 Allpaßfunktionen.

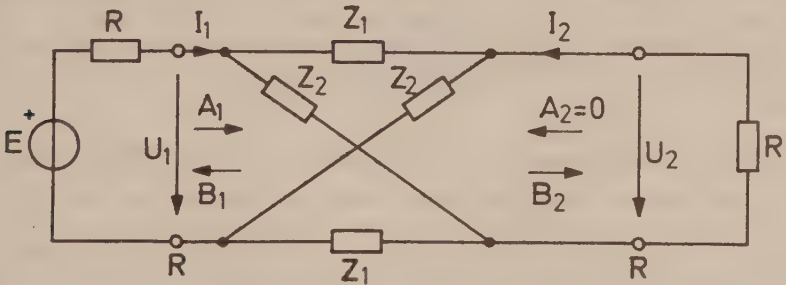


Bild 2.7 Symmetrisches Zweitor mit den kanonischen Impedanzen Z_1 und Z_2 .

Mit Hilfe von (2.12) kann das Wellenflußdiagramm eines Brücken-Wellendigitalfilters direkt hergeleitet werden (Bild 2.8) [11].

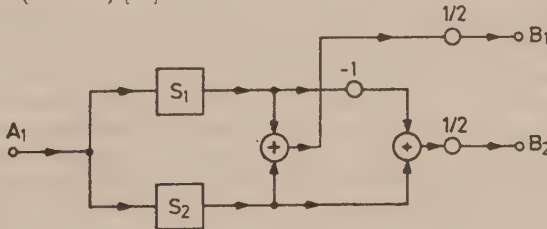


Bild 2.8 Wellenflußdiagramm des in Bild 2.7 angegebenen symmetrischen Zweitors.

Bei Brücken-Wellendigitalfiltern steht nicht nur die Transmittanz S_{21} , sondern auch die Reflektanz S_{11} als Übertragungsfunktion zur Verfügung. Falls die Transmittanz eines verlustfreien Zweitores Tiefpaßcharakter hat, wird die Reflektanz wegen der Feldkeller-Gleichung

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (2.13)$$

Hochpaßcharakter haben. Die Dämpfungen A_{21} und A_{11} sind durch

$$A_{21} = -10 \log |S_{21}(j\varphi)|^2 = 10 \log (1 + |C(j\varphi)|^2), \quad (2.14a)$$

$$A_{11} = -10 \log |S_{11}(j\varphi)|^2 = 10 \log \left(1 + \frac{1}{|C(j\varphi)|^2}\right) \quad (2.14b)$$

bestimmt, wobei

$$C(\psi) = \frac{S_{11}(\psi)}{S_{21}(\psi)} = \frac{Z_1 Z_2 - R^2}{R(Z_2 - Z_1)} = \frac{S_2 + S_1}{S_2 - S_1} \quad (2.15)$$

die sogenannte charakteristische Funktion ist. Ausgehend von den jeweiligen Dämpfungsanforderungen können die Funktionen der kanonischen Impedanzen bzw. Reflektanzen mit Hilfe von bekannten Syntheseverfahren bestimmt werden. Damit ist die Realisierung eines Brücken-WDFs auf die Realisierungen von kanonischen Impedanzen bzw. Reflektanzen zurückgeführt. In [15] wurde ein Entwurfsverfahren angegeben, mit dessen Hilfe die Brücken-WDF ohne Kenntnis der klassischen Filtertheorie direkt entworfen werden können.

2.3 Digitale Realisierungen von Reaktanzen mit Hilfe von Zweitoradaptoren

Es existieren zahlreiche Möglichkeiten, Reaktanzen digital zu realisieren. In diesem Abschnitt werden wir die Reaktanzen betrachten, deren Referenzeintore durch Kaskadierung von Allpaßgliedern, Kettenschaltung von Leitungselementen oder hiermit verwandten Methoden aufgebaut sind. Diese Reaktanzen können mit Hilfe von Zweitor-Paralleladaptoren und Verzögerungselementen digital realisiert werden.

2.3.1 Kaskadierung von Allpaßgliedern erster und zweiter Ordnung

Das Referenzeintor der Allpässe beliebiger Ordnung (Grad) kann durch die Kaskadenschaltung von Allpässen erster und zweiter Ordnung realisiert werden [20,2]. Da die einzelnen Zweitore an beiden Klemmenpaaren reflexionsfrei abgeschlossen sein müssen, benötigt man für die Zusammenschaltung von Allpaßsektionen Dreitor-Zirkulatoren mit gleichen Zirkulatorwiderständen R . Daher werden für die Zusammenschaltung von Zirkulatoren im Wellenflußdiagramm der Reaktanz keine zusätzlichen Adaptoren benötigt. Ein Tor jedes Dreitor-Zirkulators wird durch eine Kapazität oder Induktivität oder einen Serien- oder Parallelresonanzkreis abgeschlossen. Die jeweilige Transmittanz der Allpaßsektionen erster und zweiter Ordnung sind durch

$$S_1 = \frac{-\psi + b_o}{\psi + b_o}, \quad S_2 = \frac{\psi^2 - a_1 \psi + b_1}{\psi^2 + a_1 \psi + b_1} \quad (2.16a, b)$$

gegeben. Reaktanzzeitore dieser Allpaßsektionen und die zugehörigen Wellenflußdiagramme sind in Bild 2.9 [2,5] angegeben, wobei

$$\frac{R_o}{R} = b_o, \quad \frac{R}{R_2} = a_1, \quad \frac{R_1}{R_2} = b_1, \quad (2.17a, b, c)$$

$$\gamma_o = \frac{1 - b_o}{1 + b_o}, \quad \gamma_1 = \frac{1 - b_1}{1 + b_1}, \quad \gamma_2 = \frac{a_1 - b_1 - 1}{a_1 + b_1 + 1}$$

sind.

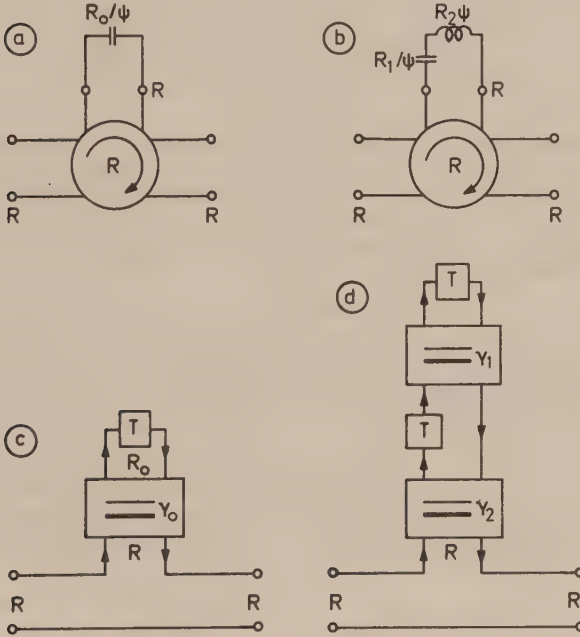


Bild 2.9 (a),(b) Allpaßsektion ersten und zweiten Grades, (c),(d) Wellenflußdiagramme von Allpaßsektionen ersten und zweiten Grades.

Man kann für die Realisierung von kanonischen Impedanzen auch die Kaskadenschaltung von Allpaßgliedern höherer Ordnung als erster und zweiter Ordnung benutzen. Die Untersuchung verschiedener Strukturen ist wichtig für die diskrete Optimierung von Multipliziererkoeffizienten, denn man kann für eine Struktur die diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten ermitteln, deren Realisierungsaufwand geringer ist als der Realisierungsaufwand anderer Strukturen.

2.3.2 Kettenschaltung von Leitungselementen

Jede Reaktanz $Z = Z(\psi)$ vom Grad $n \geq 1$ kann durch eine Kettenschaltung von n Leitungselementen realisiert werden, wobei das letzte Leitungselement durch einen Kurzschluß ($Z_o = 0$) oder durch einen Leerlauf ($Z_o = \infty$) abgeschlossen ist [21]. Bild 2.10a zeigt das Referenzeintor der in Kette geschalteten n Leitungselemente. Diese Reaktanz kann mit Hilfe von Zweiter-Paralleladaptoren, und Verzögerungen und mit einem Multiplizierer k_o digital realisiert werden [2,5]. Bild 2.10b,c zeigen die äquivalenten Wellenflußdiagramme dieser Reaktanzeintors, wobei der Multiplizierer $k_o = -1$ für $Z_o = 0$ oder $k_o = 1$ für $Z_o = \infty$ ist.

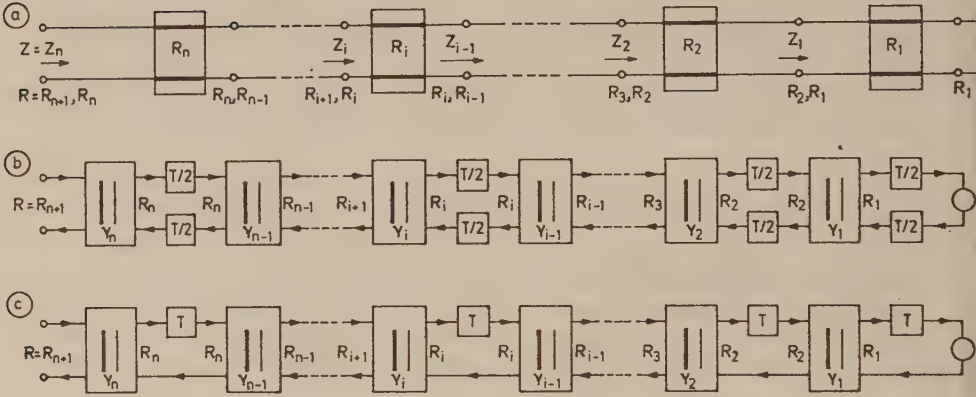


Bild 2.10 (a) Referenzeintor der Kettenschaltung von n Leitungselementen, (b),(c) äquivalente Wellenflußdiagramme der Kettenschaltung von n Leitungselementen.

Wir betrachten das in Bild 2.10a angegebene i -te Leitungselement mit dem charakteristischen Widerstand R_i , wobei $i \geq 1$ ist. Die Abschlußimpedanz dieses Leitungselements sei

Z_{i-1} . Die Eingangsimpedanz Z_i kann mit Hilfe von (2.7) wie folgt bestimmt werden:

$$Z_i = R_i \frac{Z_{i-1} + \psi R_i}{\psi Z_{i-1} + R_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.18)$$

Diese rekursive Formel kann durch

$$z_i = r_i \frac{z_{i-1} + \psi}{\psi z_{i-1} + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

umgeschrieben werden, wobei

$$z_i = \frac{Z_i}{R_{i+1}} \quad \text{und} \quad r_i = \frac{R_i}{R_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.20a, b)$$

sind. Ausgehend von der Reaktanz $Z = Z_n$ können die Adaptorkoeffizienten durch die Reduktion von Reaktanzfunktionen für $i = n, n-1, \dots, 2, 1$ wie folgt bestimmt werden:

$$r_i = z_i(1), \quad (2.21)$$

$$\gamma_i = \frac{1 - r_i}{1 + r_i}, \quad (2.22)$$

$$z_{i-1} = \frac{z_i - \psi r_i}{r_i - \psi z_i}. \quad (2.23)$$

Die Zähler- und Nennerpolynome von z_{i-1} sind nicht teilerfremd, daher müssen diese Polynome bei jedem Rekursionsschritt durch den Faktor $(\psi^2 - 1)$ dividiert werden [21].

Die Adaptorkoeffizienten können auch ausgehend von kanonischen Reflektanzen berechnet werden. Wir betrachten wieder die in Bild 2.10a angegebene Kettenschaltung von n Leitungselementen. Da Z_i für $i = 1, 2, \dots, n$ eine Reaktanzfunktion ist, wird

$$S_i = \frac{Z_i - R_{i+1}}{Z_i + R_{i+1}} = \frac{z_i - 1}{z_i + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.24)$$

eine Allpaßfunktion. Falls Z_n die kanonische Reaktanz und $R_{n+1} = R$ ist, dann ist S_n die kanonische Reflektanz (Bild 2.7). Unser Ziel ist es, ausgehend von S_n die Adaptorkoeffizienten zu bestimmen. Wenn wir z_i und z_{i-1} in der Abhängigkeit von S_i und S_{i-1} entsprechend (2.24) in (2.19) einsetzen, erhalten wir mit (2.22) die folgende rekursive Formel:

$$S_i = \frac{S_T S_{i-1} - \gamma_i}{1 - \gamma_i S_T S_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.25a)$$

mit

$$S_T = \frac{1 - \psi}{1 + \psi}. \quad (2.25b)$$

Da S_i eine Allpaßfunktion ist, können wir schreiben

$$S_i = k_i \frac{\sum_{\nu=0}^i a_{i,\nu} (-\psi)^\nu}{\sum_{\nu=0}^i a_{i,\nu} (\psi)^\nu} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad (2.26)$$

wobei das Nennerpolynom von S_i ein Hurwitzpolynom und $k_i = \pm 1$ ist. Wenn wir S_i und S_{i-1} gemäß (2.26) in (2.25a) einsetzen, erhalten wir durch den Koeffizientenvergleich für $i = n, n-1, \dots, 2, 1$ die folgenden rekursiven Formeln:

$$\gamma_i = -S_i(1) = -k_i \frac{\sum_{\nu=0}^i a_{i,\nu} (-1)^\nu}{\sum_{\nu=0}^i a_{i,\nu}} \quad , \quad (2.27)$$

$$a_{i-1,\nu} = a_{i,\nu} \frac{[1 - (-1)^i \gamma_i k_i]}{[1 - (-1)^\nu \gamma_i k_i]} - a_{i-1,\nu-1} \quad , \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, (i-1) \quad , \quad (2.28a)$$

$$a_{i-1,-1} = 0 \quad , \quad k_{i-1} = k_i \quad . \quad (2.28b, c)$$

Damit können die Adaptorkoeffizienten ausgehend von Koeffizienten der Reflektanzen direkt berechnet werden.

2.3.3 Alternative Realisierungsmöglichkeiten von Reaktanzen mit Hilfe von Zweitoradaptoren

Wir betrachten zunächst das in Bild 2.11a angegebene Referenzeintor. Die Eingangsimpedanz Z_1 und die Reflektanz

$$S_1 = \frac{Z_1 - R}{Z_1 + R} \quad (2.29)$$

dieses Eintors können mit Hilfe von (2.9) wie folgt bestimmt werden:

$$Z_1 = \frac{Z_2 Z_3 + R^2}{Z_2 + Z_3} \quad , \quad S_1 = S_2 S_3 \quad , \quad (2.30a, b)$$

wobei

$$S_2 = \frac{Z_2 - R}{Z_2 + R} \quad \text{und} \quad S_3 = \frac{Z_3 - R}{Z_3 + R} \quad (2.31a, b)$$

die zu Z_2 und Z_3 gehörigen Reflektanzen sind. Wir nehmen jetzt an, daß Z_1 bzw. S_1 bekannt ist. Wenn wir die Allpaßfunktion S_1 entsprechend (2.30b) in ein Produkt der

zwei Allpaßfunktionen S_2 und S_3 zerlegen, dann erhalten wir entsprechende Reaktanzen Z_2 und Z_3 . Damit wird die Realisierung einer Reaktanz Z_1 auf die Realisierungen von Z_2 und Z_3 zurückgeführt. Das Wellenflußdiagramm des Eintors in Bild 2.11a ist in Bild 2.11b angegeben, wobei N_2 und N_3 die entsprechenden Wellenflußdiagramme der Reaktanzen Z_2 und Z_3 sind.

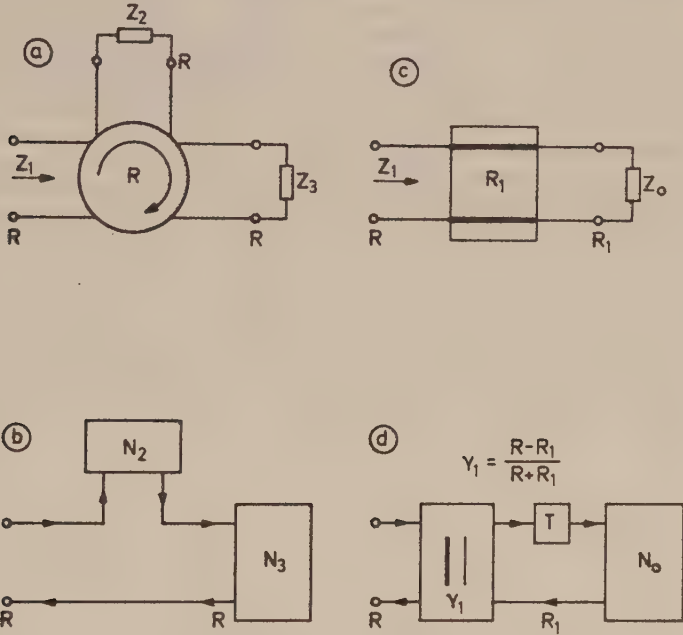


Bild 2.11 (a) Eintor mit Dreitor-Zirkulator und Reaktanzen Z_2, Z_3 , (b) Wellenflußdiagramm des Eintors in (a), wobei N_2 und N_3 die entsprechenden Wellenflußdiagramme der Reaktanzen Z_2 und Z_3 sind, (c) Eintor mit einem Leitungselement und der Reaktanz Z_o , (d) Wellenflußdiagramm des Eintors in (c), wobei N_o das entsprechende Wellenflußdiagramm der Reaktanz Z_o ist.

Wir betrachten nun das in Bild 2.11c angegebene Referenzeintor mit dem Leitungselement und der Reaktanz Z_o . Die Reaktanzfunktion von Z_1 kann mit Hilfe von einem Leitungselement um einen Grad reduziert werden [21]. Damit erhalten wir gemäß (2.18) die Reaktanz

$$Z_o = R \frac{Z_1 - \psi R}{R - \psi Z_1} \quad (2.32)$$

Das Wellenflußdiagramm des Eintors in Bild 2.11c ist in Bild 2.11d angegeben, wobei N_o das entsprechende Wellenflußdiagramm der Reaktanz Z_o ist.

Durch die Kombination der oben geschilderten Reduktionsverfahren von Reaktanzfunktionen kann eine Vielzahl von Möglichkeiten angegeben werden, um die Reaktanzen zu realisieren, z.B. können die Funktionen der in Bild 2.11a angegebenen Reaktanzen Z_2 und Z_3 mit Hilfe von jeweils einem Leitungselement um einen Grad reduziert werden und die restlichen Reaktanzen werden wieder mit Hilfe von Dreitor-Zirkulatoren in weitere Reaktanzen zerlegt, usw. Bild 2.12 zeigt vier Möglichkeiten, eine Reaktanz zu realisieren. Bild 2.13 und 2.14 zeigen dazu einige Beispiele. Damit ergibt sich eine Vielzahl von Möglichkeiten für die Realisierung von Reaktanzen mit Hilfe von Zweitoradaptoren. Für die Berechnung der Adaptorkoeffizienten der in diesem Kapitel diskutierten Wellenflußdiagramme wurde das Programm *DESIGN* (auf dem Rechner HP 1000) geschrieben. Dieses Programm rechnet ausgehend von Dämpfungsanforderungen zunächst mit Hilfe der in [15] angegebenen expliziten Formeln die erforderlichen kanonischen Reaktanzfunktionen für Butterworth-, Tschebyscheff- und Cauerparameterfilter. Anschließend werden die Strukturen und die Adaptorkoeffizienten von Brücken-Wellendigitalfiltern mit den verschiedenen Realisierungsmöglichkeiten der Reaktanzen angegeben, die mit Hilfe von Zweitoradaptoren aufgebaut sind. Durch die Kombination verschiedener Realisierungsmöglichkeiten für kanonische Reaktanzen können eine Vielzahl von Strukturen für die Brücken-WDF ermittelt werden, z.B. kann ein Zweig des Brücken-WDFs durch die Kaskadierung von Allpaßgliedern und der andere Zweig durch die Kettenschaltung von Leitungselementen aufgebaut werden.

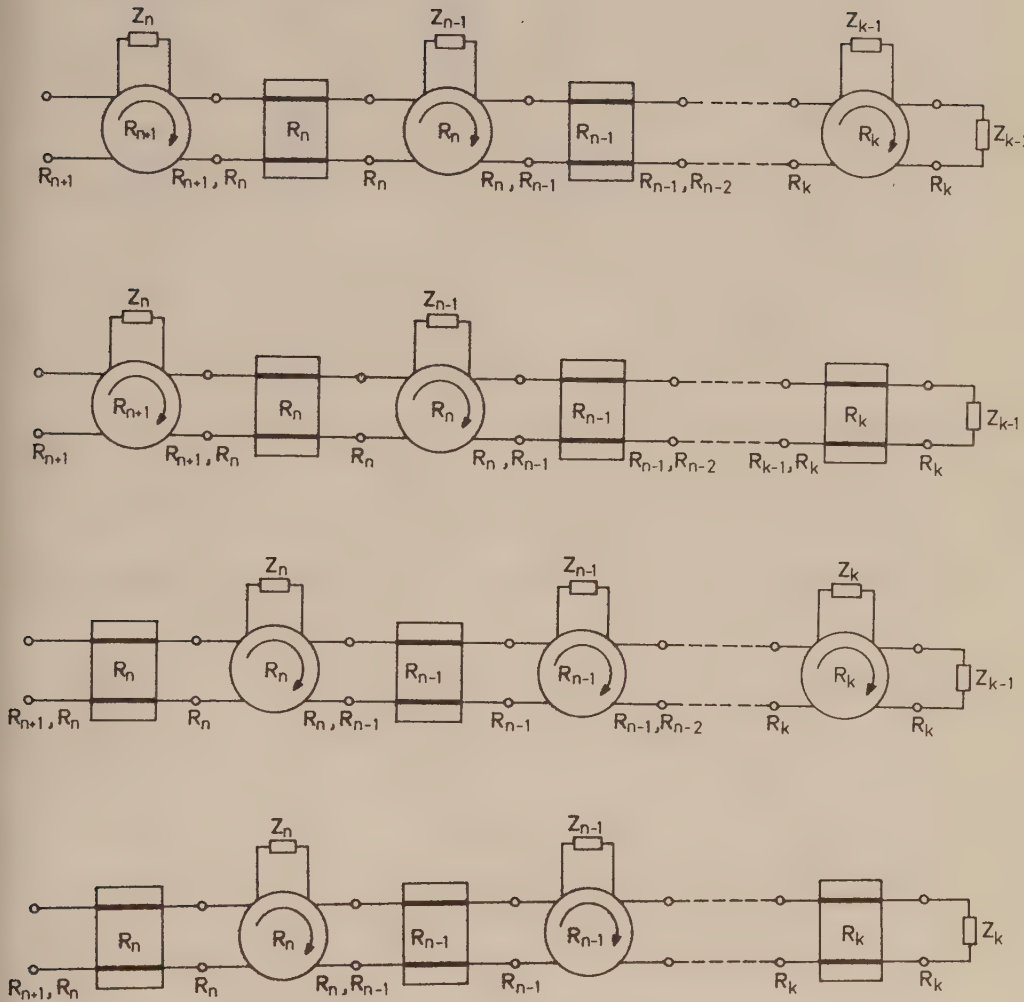
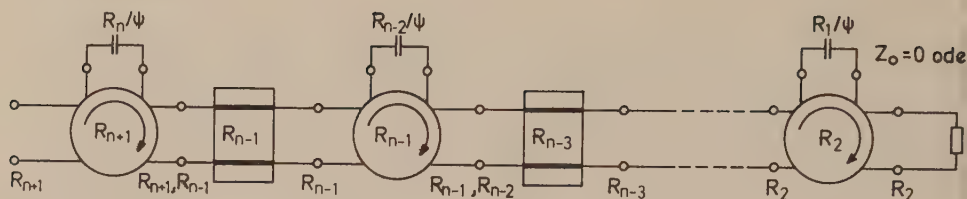
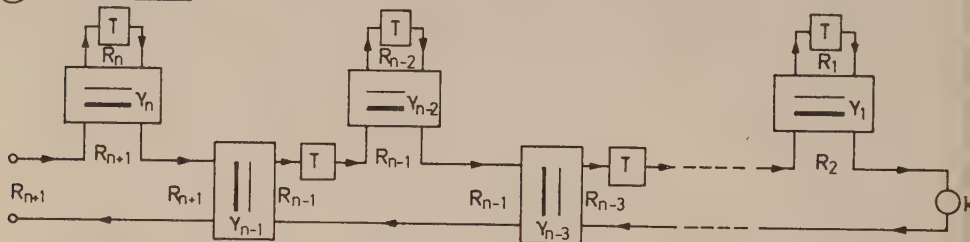


Bild 2.12 Alternative Realisierungsmöglichkeiten von Reaktanzen.
 $Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{k-1}, Z_{k-2}$ sind die Reaktanzen

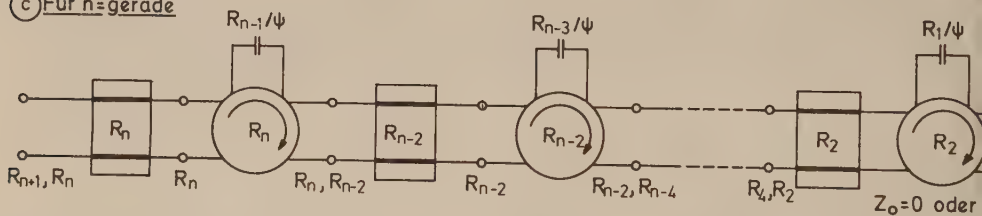
(a) Für $n = \text{ungerade}$



(b) Für $n = \text{ungerade}$



(c) Für $n = \text{gerade}$



(d) Für $n = \text{gerade}$

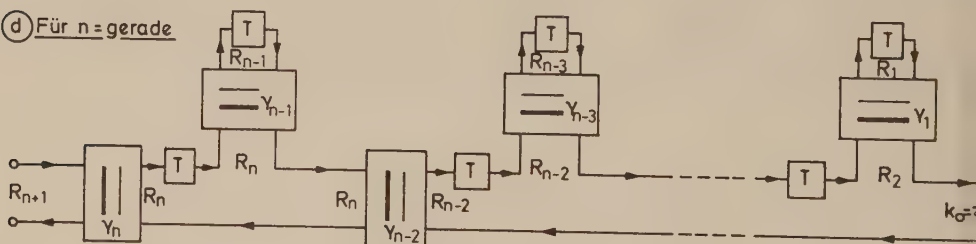


Bild 2.13 (a) Realisierung einer Reaktanz vom Grad n , wobei n ungerade ist, (b) Wellenflußdiagramm des Eintors in (a), (c) Realisierung einer Reaktanz vom Grad n , wobei n gerade ist, (d) Wellenflußdiagramm des Eintors in (c). ($k_0 = 1$ für $Z_0 = \infty$, $k_0 = -1$ für $Z_0 = 0$).

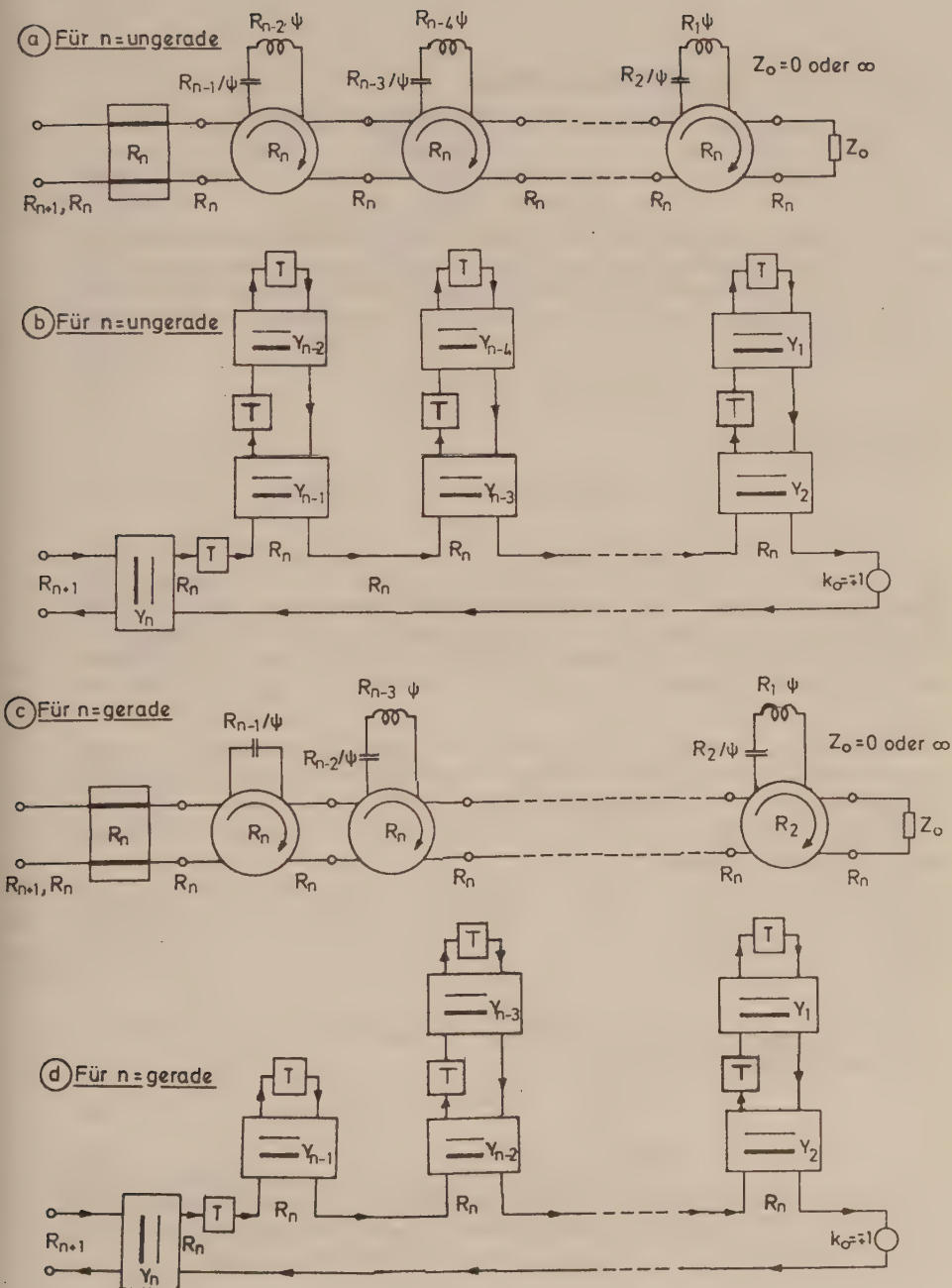


Bild 2.14 (a) Realisierung einer Reaktanz vom Grad n , wobei n ungerade ist, (b) Wellenflußdiagramm des Eintors in (a), (c) Realisierung einer Reaktanz vom Grad n , wobei n gerade ist, (d) Wellenflußdiagramm des Eintors in (c). ($k_o = 1$ für $Z_o = \infty$, $k_o = -1$ für $Z_o = 0$).

2.4 Bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter

Falls die charakteristische Funktion $C(\psi)$ eines Brücken-Wellendigitalfilters bireziprok ist, d.h.,

$$C\left(\frac{1}{\psi}\right) = \frac{1}{C(\psi)} \quad , \quad (2.33)$$

läßt sich der Realisierungsaufwand dieses Filters um mehr als die Hälfte reduzieren [5,13-16]. Ein solches Filter vom Grad N benötigt $(N-1)/2$ Zweitoradaptoren anstatt N Zweitoradaptoren im allgemeinen Fall. Die notwendige Zahl der Verzögerungen ist gleich N . Die Bedingung (2.33) läßt sich mit Hilfe von (2.15) für die kanonischen Reflektanzen wie folgt ausdrücken:

$$S_1(\psi)S_2\left(\frac{1}{\psi}\right) = -S_1\left(\frac{1}{\psi}\right)S_2(\psi) \quad . \quad (2.34)$$

Das ist erfüllt, wenn gilt:

$$S_1\left(\frac{1}{\psi}\right) = k S_1(\psi) \quad \text{und} \quad S_2\left(\frac{1}{\psi}\right) = -k S_2(\psi) \quad (2.35a, b)$$

mit $k = \pm 1$. Gemäß (2.1) erkennen wir aus (2.35), daß eine kanonische Reflektanz gerade und die andere kanonische Reflektanz ungerade in z ist. Für diesen Fall werden die in den Bildern 2.9c,d, 2.10c und 2.13b,d gezeichneten Wellenflußdiagramme erheblich vereinfacht (Bild 2.15). Bild 2.16a,b zeigen die Wellenflußdiagramme der in Bild 2.14b,d angegebenen Eintore für bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter. In Bild 2.16c wird noch eine weitere Möglichkeit für den bireziproken Fall angegeben, wobei der Grad n der Reaktanzfunktion ungerade ist.

Falls der Einsatz eines bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters kombiniert wird mit einer Abtastratenänderung um den Faktor 2, dann läßt sich der gesamte Filteraufwand nochmals halbieren [16]. Durch die bireziproke Eigenschaft der charakteristischen Funktion $C(\psi)$ können wir aus (2.14a) und (2.14b) entnehmen, daß die Dämpfungen A_{21} und A_{11} genau komplementär zueinander sind, d.h.,

$$A_{21}(f) = A_{11}(f') \quad \text{und} \quad A_{11}(f) = A_{21}(f') \quad , \quad (2.36a, b)$$

wobei

$$f' = \frac{F}{2} - f \quad (2.37)$$

die komplementäre Frequenz ist. Die Feldkeller-Gleichung (2.13) läßt sich mit Hilfe von (2.36) und (2.37) wie folgt umschreiben:

$$10^{-A_{21}(f)/10} + 10^{-A_{21}(f')/10} = 1 \quad , \quad (2.38a)$$

$$10^{-A_{11}(f)/10} + 10^{-A_{11}(f')/10} = 1 \quad . \quad (2.38b)$$

Die Dämpfung A_{21} (oder A_{11}) bei der Frequenz f kann mit Hilfe der Dämpfung bei der komplementären Frequenz f' bestimmt werden. Der 3.01 dB Punkt liegt bei der Frequenz $F/4$.

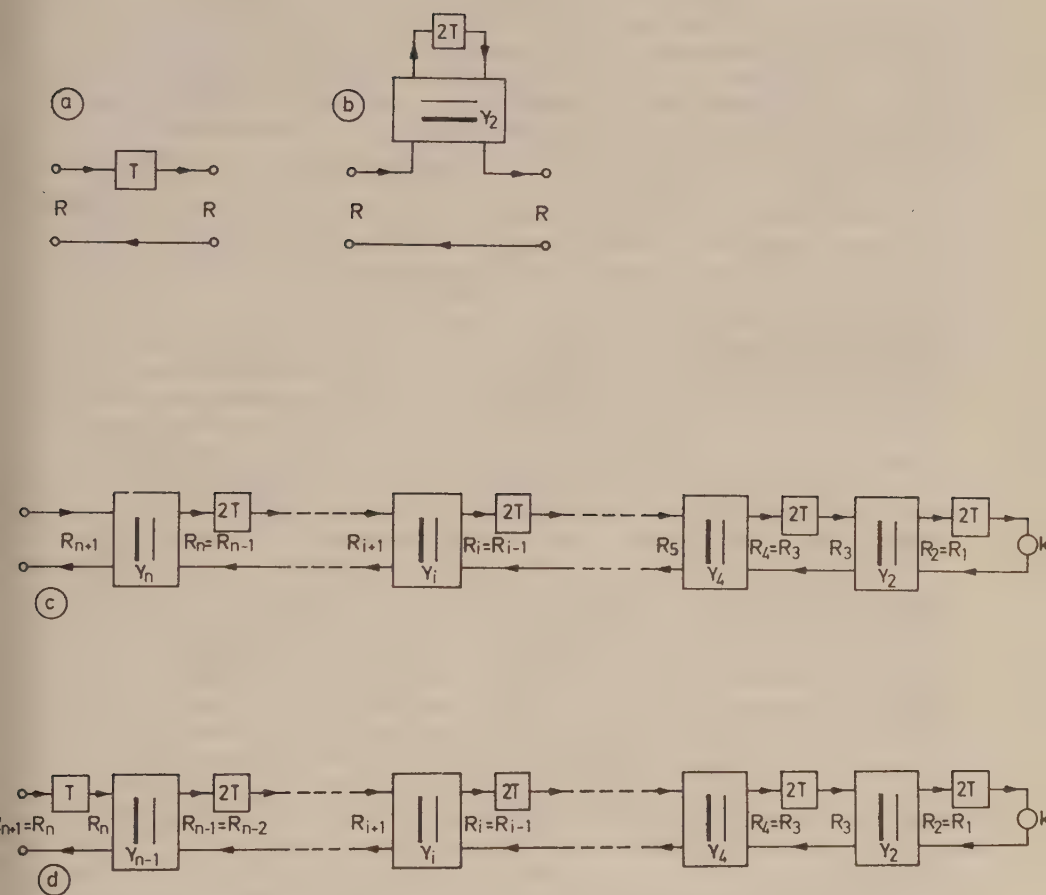
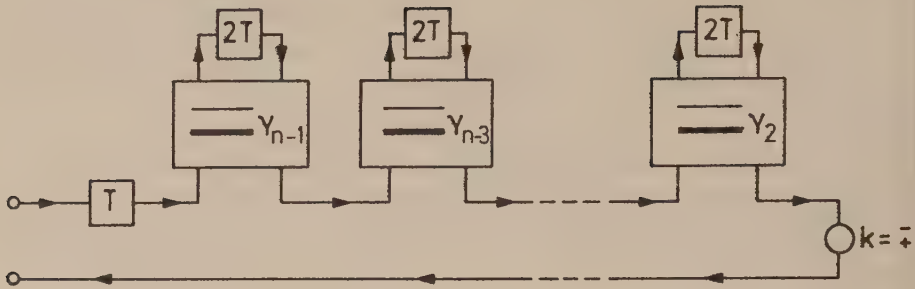
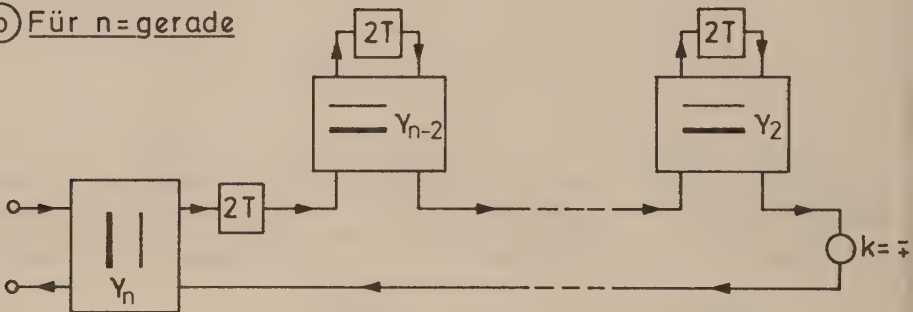


Bild 2.15 Wellenflußdiagramme für bireziproke Brücken-WDF:
 (a) Allpaßsektion ersten Grades, (b) Allpaßsektion zweiten Grades, (c) Kettenschaltung von n Leitungselementen für n gerade, (d) Kettenschaltung von n Leitungselementen für n ungerade. (n ist der Grad der Reaktanzfunktion).

(a) Für $n = \text{ungerade}$



(b) Für $n = \text{gerade}$



(c) Für $n = \text{ungerade}$

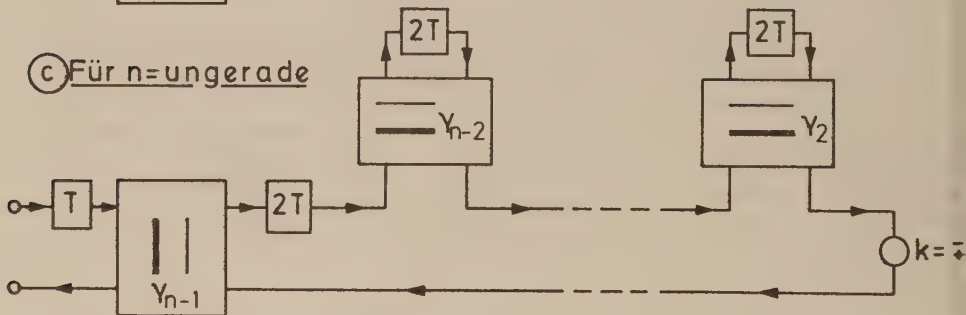


Bild 2.16 (a),(b) Wellenflußdiagramme der in Bild 2.14a,c angegebenen Reaktanzeintore für bireziproke Brücken-WDF, (c) Eine weitere Realisierungsmöglichkeit einer Reaktanz für n ungerade für bireziproke Brücken-WDF. (n ist der Grad der Reaktanzfunktion).

3. Frequenztransformationen für Wellendigitalfilter

Ziel der Frequenztransformationen ist es, Tiefpässe , Hochpässe , Bandpässe und Bandsperren mit beliebigen Grenzfrequenzen mit Hilfe von einmal ermittelten Tiefpässen (z.B. normierten Tiefpässen) zu entwerfen. Die erste Arbeit über die Frequenztransformationen für Digitalfilter wurde von A.G. Constandinitis veröffentlicht [22-24]. Bei diesen Frequenztransformationen wird jedes Verzögerungselement im Tiefpaßfilter durch einen geeigneten Allpaß ersetzt, ohne weitere Änderungen im Tiefpaßfilter durchzuführen. Die direkte Anwendung dieses Verfahrens für Wellendigitalfilter kann in gewissen Fällen zu verzögerungsfreien Schleifen im Wellenflußdiagramm führen. Eine modifizierte Form der in [24] angegebenen Tiefpaß-Bandpaß- und Tiefpaß-Bandsperre-Transformation wurde in [25] auf Wellendigitalfilter angewendet, deren Wellenflußdiagramme aus LC-Referenzfiltern hergeleitet sind; hierbei wird jedes Verzögerungselement durch ein passendes Wellenflußdiagramm ersetzt. Ein weiterer Vorschlag für Tiefpaß-Bandpaß- und Tiefpaß-Bandsperre-Transformation wurde in [26] für Wellendigitalfilter gemacht, deren Wellenflußdiagramme wiederum aus LC-Referenzfiltern hergeleitet sind. Hierbei wird jedes Verzögerungselement durch ein entsprechendes Signalflußdiagramm ersetzt, das einen Multiplizierer, 2 Verzögerungselemente und 2 Addierer enthält; in diesem Fall ist aber die Pseudopassivität [6] der Bandpässe und Bandsperren nicht mehr gesichert. Die in [25,26] vorgeschlagenen Frequenztransformationen können nicht direkt auf Brücken-Wellendigitalfilter angewendet werden, deren Brücken Zweige durch die Kaskadierung von Allpaßgliedern oder Kettenschaltung von Leitungselementen aufgebaut sind, da sonst verzögerungsfreie Schleifen entstehen würden.

Da die Wellendigitalfilter aus Referenzfiltern hergeleitet werden, können die aus der klassischen Filtertheorie bekannten Frequenztransformationen im Referenzbereich durchgeführt und anschließend das Wellenflußdiagramm des transformierten Referenzfilters hergeleitet werden. Wir werden in diesem Kapitel einige Frequenztransformationen behandeln, die direkt im Wellenflußdiagramm eines Tiefpasses durchgeführt werden können. Hier werden nur die Wellendigitalfilter betrachtet, deren Verzögerungen ein Vielfaches von T sind (voll-synchrone Wellendigitalfilter [5,7]). Zunächst werden wir die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation allgemein behandeln und anschließend für einige spezielle Strukturen. Wir werden uns im weiteren mit speziellen Tiefpaß-Hochpaß-, Tiefpaß-Bandpaß- und Tiefpaß-Bandsperre-Transformationen befassen [27], die im Wellenflußdiagramm eines passend gewählten Tiefpasses wie folgt durchführbar sind:

1. Für die Tiefpaß-Hochpaß-Transformation wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses durch ein Verzögerungselement mit einem Vorzeichenumkehrer (Inverter) ersetzt.
2. Für die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses ersetzt durch zwei Verzögerungselemente , einen Vorzeichenumkehrer und einen Zweitor-Paralleladaptor mit dem Multipliziererkoeffizienten γ .
3. Für die Tiefpaß-Bandsperre-Transformation wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses durch zwei Verzögerungselemente und einen Zweitor-Paralleladaptor mit dem Multipliziererkoeffizienten γ ersetzt.

Die Multipliziererkoeffizienten γ der bei den Frequenztransformationen eingesetzten

Zweiter-Paralleladaptoren haben jeweils den gleichen Wert. Dieser Wert hängt nur von der geometrischen Mitte der Eckfrequenzen des Durchlaßbereiches für Bandpässe und des Sperrbereiches für Bandsperren ab. Da für jedes Verzögerungselement des Tiefpaßfilters ein Zweiter-Paralleladaptor mit dem Multipliziererkoeffizienten γ eingesetzt wird, ist es für den gesamten Realisierungsaufwand von großer Bedeutung, diesen Koeffizienten γ möglichst einfach realisieren zu können. Daher wählen wir γ als Entwurfsparameter und bestimmen den zulässigen Bereich, aus dem jeder beliebige Wert für γ die angegebenen Dämpfungsanforderungen erfüllt. Für einen gewählten Wert für γ (sinnvollerweise den Wert mit dem einfachsten Realisierungsaufwand) aus diesem zulässigen Bereich entwerfen wir den passenden Tiefpaß. Nach der diskreten Optimierung der Multipliziererkoeffizienten dieses Tiefpasses wird die Frequenztransformation ohne Änderung der Koeffizientenwerte des Tiefpasses direkt durchgeführt. Damit kann der Entwurf eines Hochpasses, Bandpasses oder einer Bandsperre mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten auf den Entwurf eines passend gewählten Tiefpasses mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten zurückgeführt werden.

3.2 Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation

Das Wellenflußdiagramm eines Tiefpasses mit der Grenzfrequenz des Durchlaßbereiches f_{lp} ist in Bild 3.1a dargestellt, wobei das n -Tor N keine Verzögerungselemente enthält. Unser Ziel ist es, ausgehend von diesem Wellenflußdiagramm das Wellenflußdiagramm eines Tiefpasses mit beliebiger Grenzfrequenz f_{lpt} anzugeben. Da im Wellenflußdiagramm jedes Verzögerungselement einer Kapazität im Referenzfilter entspricht [2,5], kann das Referenzfilter wie in Bild 3.1b dargestellt werden, wobei N' das entsprechende Referenz- n -Tor von N ist. Da das n -Tor N keine Verzögerungselemente enthält, wird das n -Tor N' keine reaktiven Bauelemente enthalten, so daß sich durch die Frequenztransformationen keine Änderungen im n -Tor N ergeben.

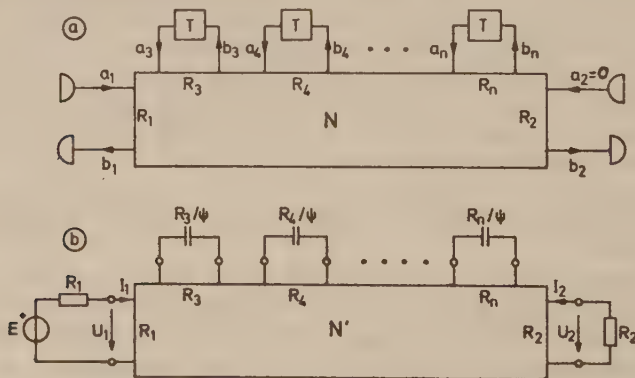


Bild 3.1 (a) Ein voll-synchrones (full-synchronous) Wellendigitalfilter, (b) das Referenzfilter des Wellendigitalfilters in (a).

Wir führen die von der klassischen Filtertheorie bekannte Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation

$$\psi_l = \frac{\psi}{\varphi_o} \quad (3.1)$$

für das Referenzfilter (Bild 3.1b) durch, wobei

$$\varphi_o = \frac{\varphi_{lpt}}{\varphi_{lp}} \quad \text{mit} \quad \varphi_{lp} = \tan\left(\frac{\pi f_{lp}}{F}\right) \quad , \quad \varphi_{lpt} = \tan\left(\frac{\pi f_{lpt}}{F}\right) \quad (3.2a, b, c)$$

die Transformationskonstante ist. Wir betrachten in Bild 3.2a das Verzögerungselement, welches in Bild 3.1a an dem Tor ν mit dem Torwiderstand R_ν abgeschlossen ist, wobei $3 \leq \nu \leq n$ ist. Dieses Verzögerungselement entspricht einer Kapazität im Referenzfilter (Bild 3.2b) mit der Impedanz

$$Z_\nu(\psi) = \frac{R_\nu}{\psi} \quad (3.3)$$

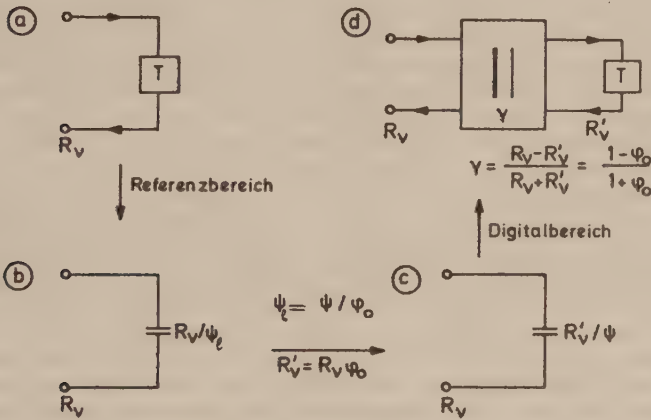


Bild 3.2 (a) Verzögerungselement, (b) Kapazität im Referenzfilter, (c) das Einton in (b) nach der Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation, (d) Wellenflußdiagramm des Eintons in (c).

Durch die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) erhalten wir das in Bild 3.2c angegebene Einton mit der Impedanz

$$Z'_\nu(\psi) = \frac{R'_\nu}{\psi} \quad \text{mit} \quad R'_\nu = R_\nu \varphi_o \quad (3.4a, b)$$

Das Wellenflußdiagramm dieses Eintors (Bild 3.2d) enthält einen Zweitor-Paralleladaptor mit der Multipliziererkoeffizienten

$$\gamma_\nu = \frac{R_\nu - R'_\nu}{R_\nu + R'_\nu} = \frac{1 - \varphi_0}{1 + \varphi_0} \quad , \quad (3.5)$$

um die unterschiedlichen Torwiderstände R_ν und R'_ν einander anzupassen. Damit soll jedes Verzögerungselement in Bild 3.1a nach der Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation durch das in Bild 3.2d angegebene Wellenflußdiagramm mit dem Adaptorkoeffizienten γ_ν für $\nu = 3, \dots, n$ ersetzt werden, ohne weitere Änderungen im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses durchzuführen. Man kann das in Bild 3.2d angegebene Wellenflußdiagramm auch durch die Anwendung der in [24] beschriebenen Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation für Digitalfilter erhalten, wenn der entsprechende Allpaß durch das in Bild 3.2d angegebene Wellenflußdiagramm realisiert wird. Eine solche Frequenztransformation würde, wenn sie überhaupt durchführbar ist, eine erhebliche Steigerung des Realisierungsaufwandes für das Wellendigitalfilter bedeuten.

Wir untersuchen nun die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) für Wellendigitalfilter, deren Referenzfilter als reaktive Bauelemente nur Kapazitäten und Induktivitäten enthalten. Eine Kapazität mit dem Torwiderstand R_ν wird im Wellenflußdiagramm des Wellendigitalfilters durch ein Verzögerungselement (Bild 2.2a,b), eine Induktivität mit dem Torwiderstand R_ν durch ein Verzögerungselement mit einem Vorzeichenumkehrer (Bild 2.2c,d) nachgebildet [2,5]. Diese Verzögerungselemente mit oder ohne Vorzeichenumkehrer sind im allgemeinen an den Toren von Adaptoren abgeschlossen und die Torwiderstände dieser Tore sind gleich den entsprechenden Torwiderständen dieser Elemente. Wir betrachten ein Verzögerungselement mit dem Torwiderstand R_ν (Bild 3.1a). Dieses Verzögerungselement sei an dem μ -ten Tor eines m -Tor-Adaptors mit dem Torwiderstand R_μ abgeschlossen, wobei $R_\mu = R_\nu$ ist. Durch die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) wird die Impedanz des Eintors im Referenzfilter gemäß (3.4) geändert und der Torwiderstand dieses Eintors wird R'_ν . Wenn der Torwiderstand R_μ durch die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation nicht verändert werden soll, muß zwischen dem μ -ten Tor und dem Verzögerungselement ein Zweitor-Paralleladaptor geschaltet werden, um die unterschiedlichen Torwiderstände R_μ und R'_ν einander anzupassen. Damit erhalten wir das in Bild 3.2d angegebene Wellenflußdiagramm, das an dem μ -ten Tor des m -tor-Adaptors abgeschlossen werden muß. Das führt aber wegen der dabei entstehenden verzögerungsfreien Schleifen zu nicht realisierbaren Wellenflußdiagrammen. Durch die Änderung des Torwiderstandes von R_μ in $R'_\mu = R_\mu \varphi_0$ wird der Zweitor-Paralleladaptor entfallen, d.h., durch die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) wird nur der Torwiderstand des μ -ten Tores des m -Tor-Adaptors geändert. Wir betrachten nun ein Verzögerungselement mit einem Vorzeichenumkehrer. Dieses Wellenflußdiagramm mit dem Torwiderstand R_ν sei an einem Tor mit dem Torwiderstand R_μ eines m -Tor-Adaptors abgeschlossen, wobei $R_\mu = R_\nu$ ist. Das Referenzeintor dieses Wellenflußdiagramms entspricht einer Induktivität mit der Impedanz $Z_\nu = R_\nu \psi$. Durch die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) wird die Impedanz dieses Eintors $Z'_\nu = R_\nu \psi / \varphi_0$ sein und dadurch wird der Torwiderstand $R'_\nu = R_\nu / \varphi_0$. Durch die Änderung des Torwiderstandes von R_μ in $R'_\mu = R_\mu / \varphi_0$ kann die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) durchgeführt werden. Zusammenfassend kann man sagen, daß

durch die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) nur die Torwiderstände der Adaptoren geändert werden. Wenn ein Verzögerungselement (oder ein Verzögerungselement mit einem Vorzeichenumkehrer) an einem Tor mit dem Torwiderstand R_μ eines m -Tor-Adaptors abgeschlossen ist, wird der Torwiderstand dieses Tores nach der Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) von R_μ in $R'_\mu = R_\mu \varphi_o$ (oder $R'_\mu = R_\mu / \varphi_o$) geändert. Nach der Festlegung der neuen Torwiderstände werden die Adaptorkoeffizienten des transformierten Tiefpasses bestimmt.

Wenn die Verzögerungselemente im Tiefpaßfilter nicht an Adaptoren angeschlossen sind (z.B. wie in Bild 2.10c), kann die oben erwähnte Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) nicht direkt angewendet werden, da sonst verzögerungsfreie Schleifen entstehen werden. Wir wollen nun für die in Bild 2.10c angegebene Struktur die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) durchführen. Diese Struktur mit dem Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}^T = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ sei eine Teilstruktur eines Tiefpasses mit der Grenzfrequenz f_{lp} . Unser Ziel ist es, nach der Durchführung der Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) die entsprechende Struktur des transformierten Tiefpasses mit der Grenzfrequenz f_{lpt} zu ermitteln. Wenn wir S_i und S_{i-1} gemäß (2.26) in (2.25a) einsetzen, erhalten wir durch den Koeffizientenvergleich für $i = 1, 2, \dots, n$ die Koeffizienten von S_i :

$$a_{i,i} = a_{i-1,i-1} \quad , \quad (3.6a)$$

$$a_{i,\nu} = (a_{i-1,\nu} + a_{i-1,\nu-1}) \frac{[1 - (-1)^\nu \gamma_i k_i]}{[1 - (-1)^i \gamma_i k_i]} \quad , \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, (i-1) \quad (3.6b)$$

mit

$$a_{i-1,-1} = 0 \quad , \quad k_i = k_{i-1} \quad , \quad k = \mp 1 \quad , \quad a_{o,o} = 1 \quad . \quad (3.6c, d, e, f)$$

Nach der Bestimmung von $a_{n,\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$ wenden wir die Frequenztransformation (3.1) an. Da es sich um eine Allpaßfunktion n -ten Grades handelt, werden die Koeffizienten der Allpaßfunktion S_n durch die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) wie folgt geändert:

$$a_{nt,\nu} = a_{n,\nu} (\varphi_o)^{n-\nu} \quad , \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n \quad . \quad (3.7)$$

Wenn wir in den Gleichungen (2.27) und (2.28) $a_{n,\nu}$ durch $a_{nt,\nu}$ und γ_i durch γ_{it} ersetzen, erhalten wir den Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}_t^T = (\gamma_{1t}, \gamma_{2t}, \dots, \gamma_{nt})$ des Tiefpasses mit der Grenzfrequenz f_{lpt} . Durch die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) wird das in Bild 2.10c angegebene Wellenflußdiagramm erhalten bleiben, nur werden sich die Koeffizientenwerte ändern, d.h., der Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}^T$ wird durch $\underline{\gamma}_t^T$ ersetzt.

Da die in Bild 2.9c,d angegebenen Wellenflußdiagramme Spezialfälle (für $n = 1$ und $n = 2$) der in Bild 2.10c angegebenen Strukturen sind, kann die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation für diese Strukturen genauso durchgeführt werden. In diesem Fall ergeben sich aus (3.6)-(3.7) und (2.27)-(2.28) die folgenden einfachen Beziehungen zwischen den Koeffizientenwerten:

Für $n = 1$:

$$\gamma_{ot} = \frac{1 - \alpha_o \varphi_o}{1 + \alpha_o \varphi_o} \quad \text{mit} \quad \alpha_o = \frac{1 - \gamma_o}{1 + \gamma_o} \quad . \quad (3.8a, b)$$

Für $n = 2$:

$$\gamma_{1t} = \frac{1 - \alpha_1 \varphi_o^2}{1 + \alpha_1 \varphi_o^2}, \quad \gamma_{2t} = \frac{1 - \alpha_{2t}}{1 + \alpha_{2t}} \quad (3.9a, b)$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1}, \quad \alpha_{2t} = \frac{(1 + \alpha_1 \varphi_o^2)(1 - \gamma_2)}{(1 + \alpha_1) \varphi_o (1 + \gamma_2)}. \quad (3.9c, d)$$

Durch die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) werden die in Bild 2.9c,d angegebenen Wellenflußdiagramme erhalten bleiben, doch werden sich die Koeffizientenwerte ändern, d.h., γ_o wird durch γ_{ot} ersetzt und γ_1, γ_2 durch γ_{1t}, γ_{2t} .

Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation bei bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern

Ein besonders interessanter Fall ergibt sich, falls die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) auf bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter angewendet wird, deren Brückenzweige durch die Kaskadierung von Allpaßgliedern ersten und zweiten Grades aufgebaut sind (Bild 2.15a,b). Mit $\gamma_o = 0$ und $\gamma_1 = 0$ können wir sofort mit Hilfe von (3.8), (3.9) die Adaptorkoeffizienten des transformierten Tiefpasses wie folgt bestimmen:

Für $n = 1$:

$$\gamma_{ot} = \frac{1 - \varphi_o}{1 + \varphi_o}. \quad (3.10)$$

Für $n = 2$:

$$\gamma_{1t} = \frac{1 - \varphi_o^2}{1 + \varphi_o^2}, \quad \gamma_{2t} = \frac{1 - \alpha_{2t}}{1 + \alpha_{2t}} \quad \text{mit} \quad \alpha_{2t} = \frac{(1 + \varphi_o^2)(1 - \gamma_2)}{2\varphi_o(1 + \gamma_2)}. \quad (3.11a, b, c)$$

In diesem Fall enthält eine Allpaßsektion ersten Grades (Bild 2.15a) einen Zweitor-Paralleladaptor mit dem Multipliziererkoeffizienten γ_{ot} (wie in Bild 2.9c, nur wird γ_o durch γ_{ot} ersetzt) und jede Allpaßsektion zweiten Grades (Bild 2.15b) zwei Zweitor-Paralleladaptoren mit den Multipliziererkoeffizienten γ_{1t} und γ_{2t} (wie in Bild 2.9d, nur werden γ_1 und γ_2 durch γ_{1t} und γ_{2t} ersetzt). Aus (3.11a) sehen wir, daß der Multipliziererkoeffizient γ_{1t} für jede Allpaßsektion zweiten Grades den gleichen Wert hat und nur von der Transformationskonstanten φ_o abhängt. Damit werden $(N - 1)/2$ Multipliziererkoeffizienten eines transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters vom Grad N den gleichen Wert haben. Durch die geeignete Wahl von φ_o kann man sogar diese Koeffizienten bei dem Entwurf des Filters diskret optimieren. Das ist eine große Erleichterung für die diskrete Optimierung von Multipliziererkoeffizienten. In [28] wurde ein direktes Entwurfsverfahren für diese Filter angegeben. Wir wollen nun für γ_{1t} den zulässigen Bereich bestimmen, aus dem jeder beliebige Wert für γ_{1t} die angegebenen Dämpfungsanforderungen des transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters erfüllt.

Bestimmung des zulässigen Bereiches für γ_{1t} bei transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern

Die Dämpfungsanforderungen zweier komplementärer Filter sind in Bild 3.3 angegeben, wobei für die Grenzfrequenzen die folgende Beziehungen gelten:

$$f_{lp} = f_{hs} \quad , \quad f_{ls} = f_{hp} \quad . \quad (3.12a, b)$$

Die Grenzfrequenzen im Referenzbereich sind durch

$$\varphi_p = \varphi_{lp} = \varphi_{hs} = \tan\left(\frac{\pi f_{lp}}{F}\right) \quad , \quad \varphi_s = \varphi_{ls} = \varphi_{hp} = \tan\left(\frac{\pi f_{ls}}{F}\right) \quad (3.13a, b)$$

bestimmt. Zwischen der minimalen Dämpfung im Sperrbereich A_s und der maximalen Dämpfung im Durchlaßbereich A_p gilt folgender Zusammenhang:

$$10^{-A_s/10} + 10^{-A_p/10} = 1 \quad . \quad (3.14)$$

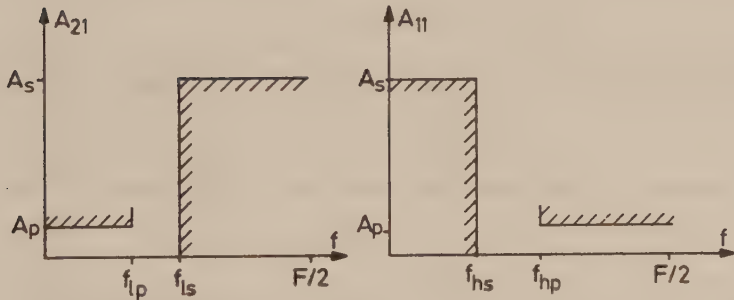


Bild 3.3 Dämpfungsanforderungen zweier komplementärer Filter

Diese Dämpfungsanforderungen können mit einem Tiefpaß-Tiefpaß transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilter erfüllt werden. Zunächst entwerfen wir das bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter mit den Grenzfrequenzen

$$\varphi_{bp} = \frac{\varphi_p}{\varphi_o} \quad , \quad \varphi_{bs} = \frac{\varphi_s}{\varphi_o} \quad \text{mit} \quad \varphi_o = \sqrt{\varphi_p \varphi_s} \quad , \quad (3.15a, b, c)$$

wobei φ_{bp} die Grenzfrequenz des Durchlaßbereiches und φ_{bs} des Sperrbereiches sind, die minimal zulässige Dämpfung im Sperrbereich ist A_s und die maximal zulässige Dämpfung

im Durchlaßbereich A_p . Nach dem Entwurf des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters wenden wir die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) mit der Transformationskonstante φ_o an. Mit Hilfe von (3.10) und (3.11) können wir die Multipliziererkoeffizienten des transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters bestimmen. Wenn die Übertragungsfunktion dieses bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters den Grad N hat, dann wird wegen (3.11a) $(N - 1)/2$ Adaptorkoeffizienten γ_{1t} den gleichen Wert haben.

Wir wollen nun für diese Koeffizienten den zulässigen Bereich bestimmen, aus dem jeder Wert für γ_{1t} die angegebenen Dämpfungsanforderungen (Bild 3.3) erfüllt. Wir werden den bei der Wahl von N entstehenden Spielraum ausnutzen, um den zulässigen Bereich für γ_{1t} anzugeben. Mit Hilfe von im Anhang angegebenen Formeln (A.1)-(A.5) können zunächst der minimal notwendige Grad n_{min} für Butterworth- und Cauerparameterfilter berechnet werden, wobei der Ausdruck im Anhang in (A.2) durch

$$\Omega_{max} = \frac{\varphi_{bs}}{\varphi_{bp}} = \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \quad (3.16)$$

ersetzt werden soll (Man beachte, daß der Entwurf von bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern für Tschebyscheffilter nicht möglich ist). Nach der Wahl vom Grad $N \geq n_{min}$ können wir mit Hilfe von im Anhang angegebenen Formeln (A.6)-(A.9) die Größe

$$\Omega_{min} = \varphi_{bs1} = \frac{1}{\varphi_{bp1}} \quad (3.17)$$

bestimmen. Nach der Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) mit der Transformationskonstante φ_{oz} muß gelten:

$$\varphi_{bs1} \leq \frac{\varphi_s}{\varphi_{oz}} \quad , \quad \varphi_{bp1} \geq \frac{\varphi_p}{\varphi_{oz}} \quad (3.18a, b)$$

Damit können wir für die Transformationskonstante φ_{oz} den zulässigen Bereich

$$\frac{\varphi_p}{\varphi_{bp1}} \leq \varphi_{oz} \leq \frac{\varphi_s}{\varphi_{bs1}} \quad (3.19)$$

bestimmen. Mit Hilfe von (3.11a) können wir den zulässigen Bereich der Koeffizienten γ_{1tz} wie folgt bestimmen:

$$\frac{1 - (\varphi_s \varphi_{bs1})^2}{1 + (\varphi_s \varphi_{bs1})^2} \leq \gamma_{1tz} \leq \frac{1 - (\varphi_p \varphi_{bp1})^2}{1 + (\varphi_p \varphi_{bp1})^2} \quad (3.20)$$

Aus diesem zulässigen Bereich können wir einen beliebigen Wert für γ_{1t} wählen (sinnvollerweise den Wert mit dem geringsten Realisierungsaufwand). Nach der Festlegung von $\gamma_{1tz} = \gamma_o$ bzw.

$$\varphi'_o = \sqrt{\frac{1 - \gamma_o}{1 + \gamma_o}} \quad (3.21)$$

wird das bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter mit den Grenzfrequenzen

$$\varphi'_{bs} = \frac{1}{\varphi'_{bp}} = \min \left\{ \frac{\varphi_s}{\varphi'_o}, \frac{\varphi'_o}{\varphi_p} \right\} \quad (3.22)$$

entworfen, wobei φ'_{bp} die Grenzfrequenz des Durchlaßbereiches und φ'_{bs} des Sperrbereiches sind. Nach der Bestimmung der Adaptorkoeffizienten dieses bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters wird die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation (3.1) mit der Transformationskonstanten φ'_o durchgeführt. Die Adaptorkoeffizienten des transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters können mit Hilfe von (3.10), (3.11) bestimmt werden, wobei in (3.10), (3.11) φ_o durch φ'_o ersetzt werden muß. Damit werden die Dämpfungsanforderungen zweier komplementärer Filter (Bild 3.3) mit einem frequenztransformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilter erfüllt. Ein solches Filter vom Grad N hat für $(N - 1)/2$ Multipliziererkoeffizienten den gleichen Wert und diese Koeffizienten können sogar beim Entwurf direkt diskret optimiert werden.

3.2 Tiefpaß-Hochpaß-Transformation

Wir betrachten die in Bild 3.4 angegebenen Dämpfungsanforderungen eines Hochpasses mit der Grenzfrequenz des Durchlaßbereiches f_{hp} und des Sperrbereiches f_{hs} . Die minimal zulässige Dämpfung im Sperrbereich ist A_s und die maximal zulässige Dämpfung im Durchlaßbereich A_p .

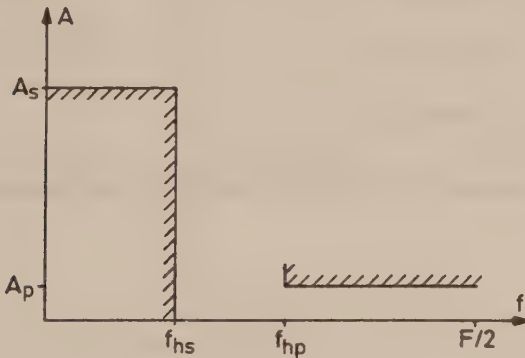


Bild 3.4 Dämpfungsanforderungen eines Hochpasses .

Der Entwurf dieses Hochpasses kann durch die Tiefpaß-Hochpaß-Transformation

$$\psi_l = \frac{1}{\psi} \quad (3.23)$$

auf den Entwurf eines Tiefpasses mit den Grenzfrequenzen

$$f_{lp} = \frac{F}{2} - f_{hp} \quad , \quad f_{ls} = \frac{F}{2} - f_{hs}$$

zurückgeführt werden. Wenn wir (3.23) gemäß (2.1) durch die z_l und z Variablen ausdrücken, erhalten wir

$$z_l^{-1} = -z^{-1} \quad (3.24)$$

Aus (3.24) folgt, daß jedes Verzögerungselement im Tiefpaßfilter nach der Tiefpaß-Hochpaß-Transformation durch Kaskadierung eines Verzögerungselements und eines Vorzeichenumkehrers ersetzt werden soll (Bild 3.5).

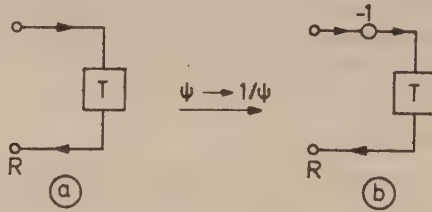


Bild 3.5 (a) Ein Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses , (b) entsprechendes Wellenflußdiagramm für ein Verzögerungselement nach der Tiefpaß-Hochpaß-Transformation .

3.3 Tiefpaß-Bandpaß-Transformation

Wir betrachten die in Bild 3.6 angegebenen Dämpfungsanforderungen eines Bandpasses mit den Grenzfrequenzen des Durchlaßbereiches f_{p1}, f_{p2} und des Sperrbereiches f_{s1}, f_{s2} .

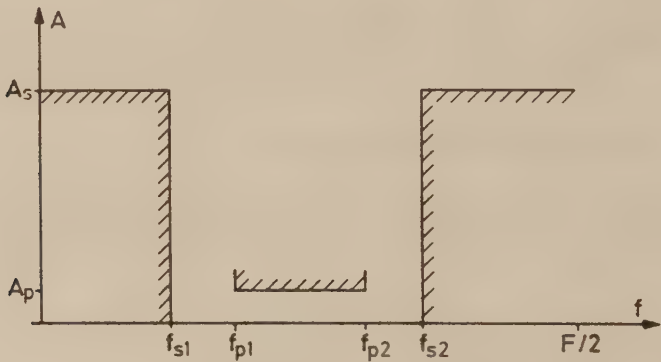


Bild 3.6 Dämpfungsanforderungen eines Bandpasses .

Die Grenzfrequenzen im Referenzbereich sind durch

$$\varphi_{p1} = \tan \left(\frac{\pi f_{p1}}{F} \right), \quad \varphi_{p2} = \tan \left(\frac{\pi f_{p2}}{F} \right), \quad (3.25a, b)$$

$$\varphi_{s1} = \tan \left(\frac{\pi f_{s1}}{F} \right), \quad \varphi_{s2} = \tan \left(\frac{\pi f_{s2}}{F} \right) \quad (3.25c, d)$$

bestimmt. Der Entwurf dieses Bandpasses kann mit Hilfe der Tiefpaß-Bandpaß-Transformation

$$\psi_l = \beta_{oz} \frac{\psi^2 + \varphi_{oz}^2}{\psi} \quad (3.26)$$

auf den Entwurf eines Tiefpasses zurückgeführt werden, wobei

$$\varphi_{p1x} \varphi_{p2x} = \varphi_{s1x} \varphi_{s2x} \quad (3.27a)$$

und

$$\varphi_{s1} \leq \varphi_{s1x} < \varphi_{p1x} \leq \varphi_{p1} < \varphi_{p2} \leq \varphi_{p2x} < \varphi_{s2x} \leq \varphi_{s2} \quad (3.27b)$$

gilt und φ_{oz} die durch

$$\varphi_{oz}^2 = \varphi_{p1x} \varphi_{p2x} = \varphi_{s1x} \varphi_{s2x} \quad (3.27c)$$

definierte positive Größe ist. Für $\psi = j\varphi$ erhalten wir aus (3.26) $\psi_l = j\varphi_l$, wobei

$$\varphi_l = \beta_{oz} \frac{\varphi^2 - \varphi_{oz}^2}{\varphi} \quad (3.28)$$

ist. Bild 3.7a zeigt die Darstellung der Beziehung (3.27b).

(a)

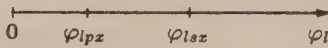
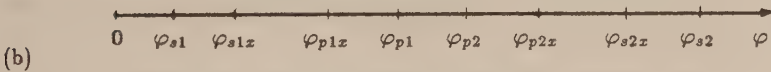


Bild 3.7 (a) Die Frequenzgrößen im φ -Bereich, (b) die Frequenzgrößen in φ_l -Bereich.

Die Durchlaßgrenze φ_{lpz} und die Sperrgrenze φ_{lsz} des Tiefpasses wird durch

$$\varphi_{lpz} = \beta_{oz} \frac{\varphi_{p2x}^2 - \varphi_{oz}^2}{\varphi_{p2x}} = \beta_{oz} (\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x}) \quad (3.29a)$$

und

$$\varphi_{lsz} = \beta_{oz} \frac{\varphi_{s2z}^2 - \varphi_{oz}^2}{\varphi_{s2z}} = \beta_{oz} (\varphi_{s2z} - \varphi_{s1z}) \quad (3.29b)$$

bestimmt. Bild 3.7b zeigt die Frequenzgrößen φ_{lpz} und φ_{lsz} auf der φ_l Achse. Wir benutzen die folgende Größe für das Verhältnis φ_{lsz} zu φ_{lpz} :

$$\Omega_z = \frac{\varphi_{lsz}}{\varphi_{lpz}} = \frac{\varphi_{s2z} - \varphi_{s1z}}{\varphi_{p2z} - \varphi_{p1z}} \quad (3.30)$$

Die Durchführung der Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (3.26) muß zu einem Wellenflußdiagramm für den Bandpaß führen, das keine verzögerungsfreie Schleife enthält.

Wir betrachten in Bild 3.8a ein Tor mit dem Torwiderstand R im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses, wobei A die einfallende und B die reflektierte Spannungswelle ist.

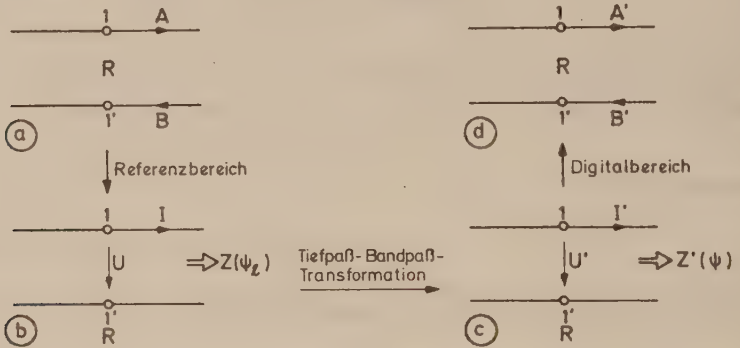


Bild 3.8 (a) Ein Tor mit dem Torwiderstand R im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses, (b) das entsprechende Tor in Referenzschaltung, (c) das Tor in Referenzschaltung nach der Tiefpaß-Bandpaß-Transformation, (d) das entsprechende Tor im Wellenflußdiagramm des Bandpasses.

Wir nehmen an, daß kein verzögerungsfreier, gerichteter Weg vom Eingang 1 zum Ausgang $1'$ in der rechten Seite des Tores existiert. Vom Eingang $1'$ zum Ausgang 1 kann ein verzögerungsfreier gerichteter Weg vorhanden sein. Durch die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation in (3.26) darf kein verzögerungsfreier gerichteter Weg in der rechten Seite des Tores vom Eingang 1 zum Ausgang $1'$ entstehen, da sonst im Wellenflußdiagramm des Bandpasses eine verzögerungsfreie Schleife entstehen kann. Wir wollen zeigen, unter welche notwendige Bedingung durch die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (3.26) im Wellenflußdiagramm des Bandpasses in der rechten Seite des Tores vom Eingang 1 zum Ausgang $1'$ kein verzögerungsfreier Weg entsteht. In Bild 3.8b wird das Tor in Referenzschaltung gezeichnet, wobei die Beziehungen zwischen A , B und U , I in (2.4a,b) angegeben sind. Die Eingangsimpedanz $Z(\psi_l)$ des zu der rechten Seite des Tores gehörigen Eintors wird

durch

$$Z(\psi_l) = \frac{U}{I} \quad (3.31)$$

bestimmt. Da vom Eingang 1 zum Ausgang 1' in Bild 3.8a kein verzögerungsfreier gerichteter Weg existiert, muß gelten [5]

$$Z(1) = R \quad (3.32)$$

Durch die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (3.26) wird die Eingangsimpedanz des zu der rechten Seite des Tores gehörigen Eintors wie folgt geändert (Bild 3.8c):

$$Z'(\psi) = \frac{U'}{I'} = Z|_{\psi_l = \beta_{ox} \frac{\psi^2 + \varphi_{ox}^2}{\psi}} \quad (3.33)$$

Das Wellenflußdiagramm dieses Tores ist in Bild 3.8d gezeichnet, wobei A' die einfallende und B' die reflektierte Spannungswelle ist und die Beziehungen zwischen A' , B' und U' , I' entsprechend (2.4a,b) bestimmt sind. Die notwendige Bedingung, daß vom Eingang 1 zum Ausgang 1' in Bild 3.8d kein verzögerungsfreier Weg existiert, ist wie folgt gegeben [5]:

$$Z'(1) = R \quad (3.34)$$

Aus (3.32) und (3.34) folgt, daß die Beziehung

$$Z'(1) = Z(1) \quad (3.35)$$

gelten muß. Wenn wir $Z'(\psi)$ für $\psi = 1$ aus (3.33) in (3.35) einsetzen, erhalten wir

$$Z(\beta_{ox}(1 + \varphi_{ox}^2)) = Z(1) \quad (3.36)$$

Daraus folgt, daß notwendigerweise

$$\beta_{ox} = \frac{1}{1 + \varphi_{ox}^2} \quad (3.37)$$

sein muß. Für diesen Wert von β_{ox} können wir aus (3.26) erkennen, daß

$$\psi_l = 1 \iff \psi = 1 \quad (3.38)$$

gilt. Für die weiteren Betrachtungen nehmen wir an, daß β_{ox} stets die in (3.37) angegebene Bedingung erfüllt. Wir betrachten in Bild 3.1a das Wellenflußdiagramm des Tiefpasses mit den Grenzfrequenzen φ_{lpx} und φ_{lsx} gemäß (3.29). Aus diesem Tiefpaß soll durch die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (3.26) mit (3.37) das Wellenflußdiagramm des Bandpasses hergeleitet werden. Wir betrachten in Bild 3.9a ein Verzögerungselement, welches in Bild 3.1a an dem Tor ν mit dem Torwiderstand R_ν abgeschlossen ist, wobei $3 \leq \nu \leq n$ ist.

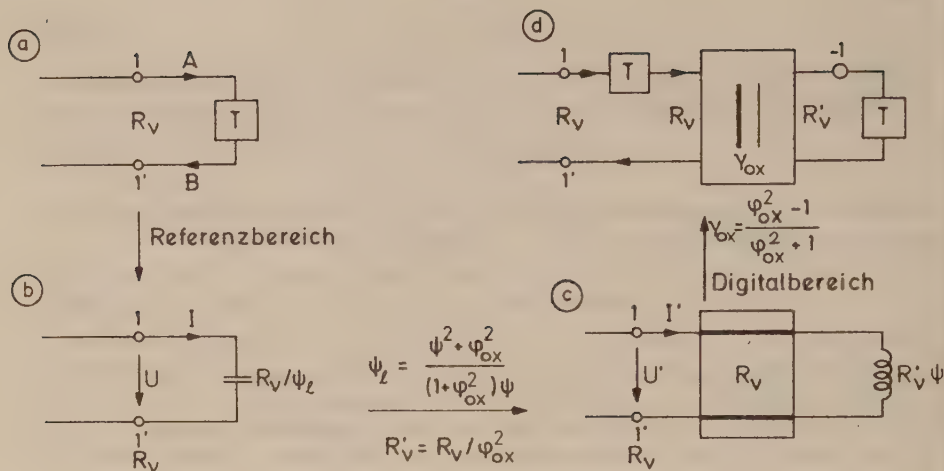


Bild 3.9 (a) Ein Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses, (b) Kapazität in Referenzschaltung des Tiefpasses, (c) Referenzeintor nach der Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (3.26) mit (3.37), (d) das Wellenflußdiagramm des in (c) angegebenen Eintors.

Dieses Verzögerungselement entspricht einer Kapazität in Referenzschaltung mit der Impedanz (Bild 3.9b)

$$Z(\psi_l) = \frac{R_V}{\psi_l} \quad (3.39)$$

Durch die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (3.26) mit (3.37) wird diese Impedanz wie folgt geändert:

$$Z'(\psi) = \frac{R_V(1 + \varphi_{ox}^2) \psi}{\psi^2 + \varphi_{ox}^2} \quad (3.40)$$

Diese Impedanz entspricht der Eingangsimpedanz des in Bild 3.9c angegebenen Eintors mit einem Leitungselement mit dem Wellenwiderstand R_V und einer Induktivität mit der Impedanz $Z_L = R'_V \psi$, wobei $R'_V = R_V / \varphi_{ox}^2$ ist. Das Wellenflußdiagramm dieses Eintors wird in Bild 3.9d angegeben [2,5], wobei der Multipliziererkoeffizient γ_{ox} des Zweitor-Paralleladaptors durch

$$\gamma_{ox} = \frac{\varphi_{ox}^2 - 1}{\varphi_{ox}^2 + 1} \quad (3.41)$$

bestimmt wird und nur von φ_{ox}^2 abhängt. Jedes Verzögerungselement in Bild 3.1a wird nach der Tiefpaß-Bandpaß-Transformation durch das Wellenflußdiagramm in Bild 3.9d ersetzt. Damit wird ein Bandpaßfilter N Zweitor-Paralleladaptors mit den gleichen

Multipliziererkoeffizienten γ_{oz} enthalten, falls der Tiefpaß N Verzögerungselemente hat. Da der Koeffizient γ_{oz} in (3.41) nur von φ_{oz}^2 abhängt, kann γ_{oz} nur durch die Änderung von φ_{oz} geändert werden. Wir werden im weiteren zeigen, wie man ausgehend von den in Bild 3.6 angegebenen Dämpfungsanforderungen für den Koeffizienten γ_{oz} einen zulässigen Bereich angeben kann [27]. Aus diesem zulässigen Bereich von γ_{oz} kann der einfachste Koeffizientenwert (bezüglich des Realisierungsaufwandes) ausgewählt werden.

Wir benutzen im weiteren die durch

$$\varphi_{po}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{p2} \quad , \quad \varphi_{so}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{s2} \quad (3.42a, b)$$

definierten positiven Größen φ_{po} und φ_{so} . Wir wollen Ω_x maximal machen. Hierzu bemerken wir zunächst, daß es vier Lösungen von (3.27a) und (3.27b) geben kann, bei denen drei der vier Variablen φ_{s1z} , φ_{p1z} , φ_{p2z} und φ_{s2z} die gemäß (3.27b) zulässige Schranke erreichen. Diese vier zulässigen Lösungen sind hiernach erläutert:

$$a) \quad \varphi_{s1z} = \frac{\varphi_{po}^2}{\varphi_{s2}} \quad , \quad \varphi_{p1z} = \varphi_{p1} \quad , \quad \varphi_{p2z} = \varphi_{p2} \quad , \quad \varphi_{s2z} = \varphi_{s2} \quad .$$

Bild 3.10 zeigt diese Situation.

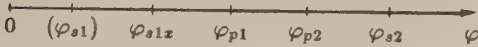


Bild 3.10 Die Verteilung der Frequenzgrößen für die Lösung a.

Aus (3.27b) folgt $\varphi_{s1z} < \varphi_{p1}$. Außerdem ist $\varphi_{s1z} \geq \varphi_{s1}$ erfüllt, wenn

$$\varphi_{so} \leq \varphi_{po} \quad (3.43)$$

ist. Der zugehörige Wert von Ω_x ist

$$\Omega_{s1} = \frac{\varphi_{s2}^2 - \varphi_{p1}\varphi_{p2}}{(\varphi_{p2} - \varphi_{p1})\varphi_{s2}} \quad . \quad (3.44)$$

$$b) \quad \varphi_{s1z} = \varphi_{s1} \quad , \quad \varphi_{p1z} = \frac{\varphi_{so}^2}{\varphi_{p2}} \quad , \quad \varphi_{p2z} = \varphi_{p2} \quad , \quad \varphi_{s2z} = \varphi_{s2} \quad .$$

Bild 3.11 zeigt diese Situation.

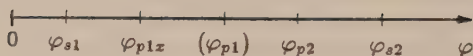


Bild 3.11 Die Verteilung der Frequenzgrößen für die Lösung b.

Aus (3.27b) folgt $\varphi_{p1x} > \varphi_{s1}$. Außerdem ist $\varphi_{p1x} \leq \varphi_{p1}$ erfüllt, wenn die in (3.43) angegebene Beziehung gilt. Der zugehörige Wert von Ω_z ist

$$\Omega_{p1} = \frac{(\varphi_{s2} - \varphi_{s1})\varphi_{p2}}{\varphi_{p2}^2 - \varphi_{s1}\varphi_{s2}} . \quad (3.45)$$

$$c) \quad \varphi_{s1x} = \varphi_{s1} \quad , \quad \varphi_{p1x} = \varphi_{p1} \quad , \quad \varphi_{p2x} = \frac{\varphi_{s0}^2}{\varphi_{p1}} \quad , \quad \varphi_{s2x} = \varphi_{s2} .$$

Bild 3.12 zeigt diese Situation.

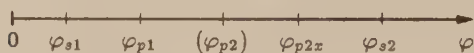


Bild 3.12 Die Verteilung der Frequenzgrößen für den Lösung c.

Aus (3.27b) folgt $\varphi_{p2x} < \varphi_{s2}$. Außerdem ist $\varphi_{p2x} \geq \varphi_{p2}$ erfüllt, wenn

$$\varphi_{s0} \geq \varphi_{p0} \quad (3.46)$$

ist. Der zugehörige Wert von Ω_z ist

$$\Omega_{p2} = \frac{(\varphi_{s2} - \varphi_{s1})\varphi_{p1}}{\varphi_{s1}\varphi_{s2} - \varphi_{p1}^2} . \quad (3.47)$$

$$d) \quad \varphi_{s1x} = \varphi_{s1} \quad , \quad \varphi_{p1x} = \varphi_{p1} \quad , \quad \varphi_{p2x} = \varphi_{p2} \quad , \quad \varphi_{s2x} = \frac{\varphi_{p0}^2}{\varphi_{s1}} .$$

Bild 3.13 zeigt diese Situation.

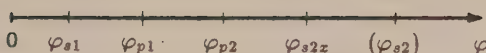


Bild 3.13 Die Verteilung der Frequenzgrößen für die Lösung d.

Aus (3.27b) folgt $\varphi_{s2x} > \varphi_{p2}$. Außerdem ist $\varphi_{s2x} \leq \varphi_{s2}$ erfüllt, wenn die in (3.46) angegebene Beziehung gilt. Der zugehörige Wert von Ω_x ist

$$\Omega_{s2} = \frac{\varphi_{p1}\varphi_{p2} - \varphi_{s1}^2}{(\varphi_{p2} - \varphi_{p1})\varphi_{s1}} \quad (3.48)$$

Wir wollen nun die Größen Ω_{p1} , Ω_{p2} , Ω_{s1} und Ω_{s2} miteinander vergleichen. Aus (3.44), (3.45), (3.47) und (3.48) finden wir

$$\frac{1}{\Omega_{s1}} - \frac{1}{\Omega_{p1}} = \frac{(\varphi_{s0}^2 - \varphi_{p0}^2)(\varphi_{s2}^2 - \varphi_{p2}^2)}{(\varphi_{s2} - \varphi_{s1})(\varphi_{s2} - \varphi_{p1}\varphi_{p2})\varphi_{p2}} \quad (3.49a)$$

$$\Omega_{s1} - \Omega_{s2} = \frac{(\varphi_{s0}^2 - \varphi_{p0}^2)(\varphi_{s1} + \varphi_{s2})}{(\varphi_{p2} - \varphi_{p1})\varphi_{s1}\varphi_{s2}} \quad (3.49b)$$

$$\frac{1}{\Omega_{p2}} - \frac{1}{\Omega_{s2}} = \frac{(\varphi_{s0}^2 - \varphi_{p0}^2)(\varphi_{p1}^2 - \varphi_{s1}^2)}{(\varphi_{s2} - \varphi_{s1})(\varphi_{p1}\varphi_{p2} - \varphi_{s1}^2)\varphi_{p1}} \quad (3.49c)$$

Da in (3.49) alle Faktoren bis auf $(\varphi_{s0}^2 - \varphi_{p0}^2)$ stets positiv sind, folgt

$$\varphi_{s0} \geq \varphi_{p0} \implies \Omega_{p1} \geq \Omega_{s1} \geq \Omega_{s2} \geq \Omega_{p2} \quad (3.50a)$$

$$\varphi_{s0} \leq \varphi_{p0} \implies \Omega_{p1} \leq \Omega_{s1} \leq \Omega_{s2} \leq \Omega_{p2} \quad (3.50b)$$

Von den vier betrachteten Fällen sind aber für $\varphi_{s0} \geq \varphi_{p0}$ nur c) und d) zugehörige Lösungen und für $\varphi_{s0} \leq \varphi_{p0}$ nur a) und b). Somit gibt also für $\varphi_{s0} \geq \varphi_{p0}$ die Lösung d den größten Wert von Ω_x und für $\varphi_{s0} \leq \varphi_{p0}$ die Lösung a. Wir wollen jetzt nachweisen, daß es tatsächlich keine günstigeren Lösungen für Ω_x als diese zuletzt genannten Lösungen geben kann. Dieser Nachweis folgt aus den nachfolgenden Überlegungen:

1. Ω_x kann nicht maximal sein, wenn nicht mindestens eine der Sperrgrenzen φ_{s1x} und φ_{s2x} sowie mindestens eine der Durchlaßgrenzen φ_{p1x} und φ_{p2x} gleich der entsprechenden Schranke ist (vgl. (2.27b)). Andernfalls ließe sich nämlich unter Festhalten von φ_{0x} und Beibehalten von (3.27a) der Wert von $(\varphi_{s2x} - \varphi_{s1x})$ in (3.30) erhöhen und/oder derjenige von $(\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x})$ in (3.30) erniedrigen, also Ω_x mit Sicherheit weiter vergrößern.

2. Das Maximum von Ω_x kann nicht erreicht sein, wenn $\varphi_{p1x} < \varphi_{p1}$ ist. Denn sonst ließe sich eine weitere Lösung mit

$$\varphi'_{s1x} = \frac{\varphi_{p1}\varphi_{p2x}}{\varphi_{s2x}} \quad , \quad \varphi'_{p1x} = \varphi_{p1} \quad , \quad \varphi'_{p2x} = \varphi_{p2x} \quad , \quad \varphi'_{s2x} = \varphi_{s2x} \quad (3.51a, b, c, d)$$

finden, für die in der Tat $\varphi_{s1} \leq \varphi_{s1x} < \varphi'_{s1x} < \varphi_{p1}$ ist und für die der entsprechende Wert von Ω_x durch

$$\Omega'_x = \frac{\varphi_{s2x}^2 - \varphi_{p1}\varphi_{p2x}}{\varphi_{s2x}(\varphi_{p2x} - \varphi_{p1})} \quad (3.52)$$

gegeben ist. Aus (3.52) und (3.30) mit (3.27a) finden wir:

$$\Omega'_x - \Omega_x = \frac{(\varphi_{s2x}^2 - \varphi_{p2x}^2)(\varphi_{p1} - \varphi_{p1x})}{\varphi_{s2x}(\varphi_{p2x} - \varphi_{p1})(\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x})} \quad (3.53)$$

Da in (3.53) alle Faktoren wegen (3.27b) stets positiv sind, folgt

$$\Omega'_x > \Omega_x \quad (3.54)$$

3. Das Maximum von Ω_x kann nicht erreicht sein, wenn $\varphi_{p2x} > \varphi_{p2}$ ist. Denn sonst ließe sich eine weitere Lösung mit

$$\varphi'_{s1x} = \varphi_{s1x} \quad , \quad \varphi'_{p1x} = \varphi_{p1x} \quad , \quad \varphi'_{p2x} = \varphi_{p2} \quad , \quad \varphi'_{s2x} = \frac{\varphi_{p2}\varphi_{p1x}}{\varphi_{s1x}} \quad (3.55a, b, c, d)$$

finden, für die in der Tat $\varphi_{p2} < \varphi'_{s2x} < \varphi_{s2x} \leq \varphi_{s2}$ ist und für die der entsprechende Wert von Ω_x durch

$$\Omega'_x = \frac{\varphi_{p1x}\varphi_{p2} - \varphi_{s1x}^2}{\varphi_{s1x}(\varphi_{p2} - \varphi_{p1x})} \quad (3.56)$$

gegeben ist. Aus (3.56) und (3.30) mit (3.27a) finden wir:

$$\Omega'_x - \Omega_x = \frac{(\varphi_{p1x}^2 - \varphi_{s1x}^2)(\varphi_{p2x} - \varphi_{p2})}{\varphi_{s1x}(\varphi_{p2} - \varphi_{p1x})(\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x})} \quad (3.57)$$

Da in (3.57) alle Faktoren wegen (3.27b) stets positiv sind, gilt

$$\Omega'_x > \Omega_x \quad (3.58)$$

Ausgehend von dem maximalen Wert Ω_{max} von Ω_x wird der minimal zulässige Wert Ω_{min} von Ω_x mit Hilfe von im Anhang angegebenen Formeln ermittelt. Wir wollen jetzt den Anbetracht von Ω_{min} zulässigen Bereich für γ_{ox} bestimmen. Falls φ_{omin} der minimal zulässige Wert von φ_{ox} und φ_{omax} der maximal zulässige Wert von φ_{ox} ist, dann können wir gemäß (3.41) den zulässigen Bereich von γ_{ox} wie folgt angeben:

$$\gamma_{omin} \leq \gamma_{ox} \leq \gamma_{omax} \quad , \quad \gamma_{omin} = \frac{\varphi_{omin}^2 - 1}{\varphi_{omin}^2 + 1} \quad , \quad \gamma_{omax} = \frac{\varphi_{omax}^2 - 1}{\varphi_{omax}^2 + 1} \quad (3.59a, b, c)$$

Nun ist Ω_x aber durch φ_{ox} nicht eindeutig festgelegt. Wir bestimmen daher zunächst für jeden Wert von φ_{ox} den größtmöglichen Wert von Ω_x , um dadurch, wie wir später sehen werden, den durch $\Omega_{min} \leq \Omega_x \leq \Omega_{max}$ gegebenen Spielraum möglichst vollständig ausschöpfen zu können. Den größtmöglichen Wert von Ω_x bezeichnen wir mit Ω_{xmax} . Bei der Bestimmung von Ω_{xmax} müssen wir natürlich (3.27), also

$$\varphi_{s1} \leq \varphi_{s1x} < \varphi_{p1x} \leq \varphi_{p1} < \varphi_{p2} \leq \varphi_{p2x} < \varphi_{s2x} \leq \varphi_{s2} \quad , \quad (3.60a)$$

$$\varphi_{ox}^2 = \varphi_{p1x}\varphi_{p2x} = \varphi_{s1x}\varphi_{s2x} \quad (3.60b)$$

beachten und außerdem die ersten drei Forderungen, die wir im Anschluß an (3.50) genannt haben, nämlich, daß bei gegebenem φ_{ox} mindestens eine Schranke des Durchlaßbereiches und eine Schranke des Sperrbereiches eingenommen werden muß.

Aus (3.60) folgt, mit $\varphi_1 = \sqrt{\varphi_{s1}\varphi_{p2}}$, $\varphi_2 = \sqrt{\varphi_{p1}\varphi_{s2}}$

$$\varphi_{ox}^2 = \varphi_{p1x}\varphi_{p2x} > \varphi_{s1}\varphi_{p2} = \varphi_1^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{ox} > \varphi_1 \quad , \quad (3.61a)$$

$$\varphi_{ox}^2 = \varphi_{s1x}\varphi_{s2x} < \varphi_{p1}\varphi_{s2} = \varphi_2^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{ox} < \varphi_2 \quad . \quad (3.61b)$$

Insgesamt also

$$\varphi_1 < \varphi_{ox} < \varphi_2 \quad \text{mit} \quad \varphi_1 = \sqrt{\varphi_{s1}\varphi_{p2}} \quad , \quad \varphi_2 = \sqrt{\varphi_{p1}\varphi_{s2}} \quad . \quad (3.62a, b, c)$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

Fall 1

Es gelte

$$\varphi_{po} \leq \varphi_{so} \quad . \quad (3.63)$$

Dann ist $\Omega_x = \Omega_{xmax} = \Omega_{max} = \Omega_{s2}$ für

$$\varphi_{s1x} = \varphi_{s1} \quad , \quad \varphi_{p1x} = \varphi_{p1} \quad , \quad \varphi_{p2x} = \varphi_{p2} \quad , \quad \varphi_{s2x} = \frac{\varphi_{po}^2}{\varphi_{s1}} \leq \varphi_{s2} \quad . \quad (3.64a, b, c, d)$$

Es sind drei Möglichkeiten zu unterscheiden.

a) $\varphi_1 < \varphi_{ox} \leq \varphi_{po} \leq \varphi_{so}$ mit $\varphi_1^2 = \varphi_{s1}\varphi_{p2}$.

Für $\varphi_{ox} < \varphi_{po} \leq \varphi_{so}$ ist weder $\varphi_{s2x} = \varphi_{s2}$ noch $\varphi_{p1x} = \varphi_{p1}$ möglich, denn dies würde gemäß (3.60b) zu $\varphi_{s1x} = \varphi_{ox}^2/\varphi_{s2} < \varphi_{s1}$ bzw. $\varphi_{p2x} = \varphi_{ox}^2/\varphi_{p1} < \varphi_{p2}$ führen. Die einzige Möglichkeit ist also

$$\varphi_{s1x} = \varphi_{s1} \quad , \quad \varphi_{p1x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{p2}} \quad , \quad \varphi_{p2x} = \varphi_{p2} \quad , \quad \varphi_{s2x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{s1}} \quad . \quad (3.65a, b, c, d)$$

Dann ist

$$\varphi_{ox}^2 = \varphi_{p1x}\varphi_{p2} = \varphi_{s1}\varphi_{s2x} \quad (3.66)$$

und man kann nachprüfen, daß dann auch (3.60a) erfüllt ist. Wir erhalten

$$\Omega_{x\max} = \frac{\varphi_{p2} (\varphi_{oz}^2 - \varphi_{s1}^2)}{\varphi_{s1} (\varphi_{p2}^2 - \varphi_{oz}^2)} \quad (3.67)$$

Der Verlauf von $\Omega_{x\max}$ für $\varphi_{s1} \leq \varphi_{oz} \leq \varphi_{p0}$ wird in Bild 3.14 gezeichnet (Teil a der Kurve).

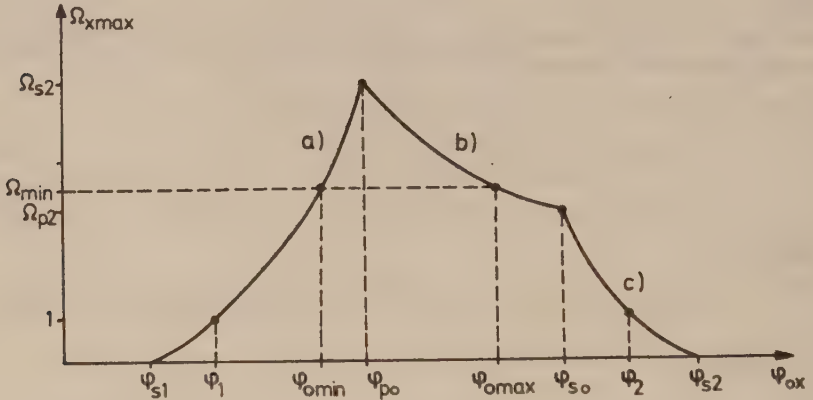


Bild 3.14 Der Verlauf von $\Omega_{x\max}$ in (3.67) für $\varphi_{s1} \leq \varphi_{oz} \leq \varphi_{p0}$, in (3.70) für $\varphi_{p0} \leq \varphi_{oz} \leq \varphi_{s0}$ und in (3.73) für $\varphi_{s0} \leq \varphi_{oz} \leq \varphi_{s2}$.

b) $\varphi_{p0} \leq \varphi_{oz} \leq \varphi_{s0}$.

Für $\varphi_{p0} = \varphi_{s0}$ ist auch $\varphi_{oz} = \varphi_{p0} = \varphi_{s0}$ und somit $\Omega_{x\max} = \Omega_{s1} = \Omega_{p1} = \Omega_{p2} = \Omega_{s2}$. Wir nehmen daher an, daß $\varphi_{p0} < \varphi_{s0}$ ist. Für $\varphi_{p0} < \varphi_{oz} < \varphi_{s0}$ ist weder $\varphi_{p2x} = \varphi_{p2}$ noch $\varphi_{s2x} = \varphi_{s2}$ möglich, denn dies würde gemäß (3.60b) zu $\varphi_{p1x} = \varphi_{oz}^2 / \varphi_{p2} > \varphi_{p1}$ bzw. $\varphi_{s1x} = \varphi_{oz}^2 / \varphi_{s2} < \varphi_{s1}$ führen. Die einzige Möglichkeit ist also

$$\varphi_{s1x} = \varphi_{s1} \quad , \quad \varphi_{p1x} = \varphi_{p1} \quad , \quad \varphi_{p2x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{p1}} \quad , \quad \varphi_{s2x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{s1}} \quad (3.68a, b, c, d)$$

Dann ist

$$\varphi_{oz}^2 = \varphi_{p1} \varphi_{p2x} = \varphi_{s1} \varphi_{s2x} \quad (3.69)$$

und man kann nachprüfen, daß dann (3.60a) erfüllt ist. Wir erhalten

$$\Omega_{x\max} = \frac{\varphi_{p1} (\varphi_{oz}^2 - \varphi_{s1}^2)}{\varphi_{s1} (\varphi_{oz}^2 - \varphi_{p1}^2)} \quad (3.70)$$

Der Verlauf von Ω_{zmax} für $\varphi_{p0} \leq \varphi_{0z} \leq \varphi_{s0}$ wird in Bild 3.14 gezeichnet (Teil b der Kurve).

$$c) \varphi_{p0} \leq \varphi_{s0} \leq \varphi_{0z} < \varphi_2 \text{ mit } \varphi_2^2 = \varphi_{p1}\varphi_{s2} .$$

Für $\varphi_{p0} \leq \varphi_{s0} < \varphi_{0z}$ ist weder $\varphi_{s1z} = \varphi_{s1}$ noch $\varphi_{p2z} = \varphi_{p2}$ möglich, denn dies würde gemäß (3.60b) zu $\varphi_{s2z} = \varphi_{0z}^2/\varphi_{s1} > \varphi_{s2}$ bzw. $\varphi_{p1z} = \varphi_{0z}^2/\varphi_{p2} > \varphi_{p1}$ führen. Die einzige Möglichkeit ist also

$$\varphi_{s1z} = \frac{\varphi_{0z}^2}{\varphi_{s2}} , \quad \varphi_{p1z} = \varphi_{p1} , \quad \varphi_{p2z} = \frac{\varphi_{0z}^2}{\varphi_{p1}} , \quad \varphi_{s2z} = \varphi_{s2} . \quad (3.71a, b, c, d)$$

Dann ist

$$\varphi_{0z}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{p2z} = \varphi_{s1z}\varphi_{s2} \quad (3.72)$$

und man kann nachprüfen, daß dann (3.60a) erfüllt ist. Wir erhalten

$$\Omega_{zmax} = \frac{\varphi_{p1} (\varphi_{s2}^2 - \varphi_{0z}^2)}{\varphi_{s2} (\varphi_{0z}^2 - \varphi_{p1}^2)} . \quad (3.73)$$

Der Verlauf von Ω_{zmax} für $\varphi_{s0} \leq \varphi_{0z} \leq \varphi_{s2}$ wird in Bild 3.14 gezeichnet (Teil c der Kurve).

Fall 2

Es gelte

$$\varphi_{s0} \leq \varphi_{p0} . \quad (3.74)$$

Dann ist $\Omega_z = \Omega_{zmax} = \Omega_{max} = \Omega_{s1}$ für

$$\varphi_{s1z} = \frac{\varphi_{p0}^2}{\varphi_{s2}} \geq \varphi_{s1} , \quad \varphi_{p1z} = \varphi_{p1} , \quad \varphi_{p2z} = \varphi_{p2} , \quad \varphi_{s2z} = \varphi_{s2} . \quad (3.75a, b, c, d)$$

Es sind drei Möglichkeiten zu unterscheiden.

$$a) \varphi_1 < \varphi_{0z} \leq \varphi_{s0} \leq \varphi_{p0} \text{ mit } \varphi_1^2 = \varphi_{s1}\varphi_{p2} .$$

Für $\varphi_{0z} < \varphi_{s0} \leq \varphi_{p0}$ ist weder $\varphi_{s2z} = \varphi_{s2}$ noch $\varphi_{p1z} = \varphi_{p1}$ möglich, denn dies würde gemäß (3.60b) zu $\varphi_{s1z} < \varphi_{s1}$ bzw. $\varphi_{p2z} < \varphi_{p2}$ führen. Die einzige Möglichkeit sind die in (3.65) angegebenen Werte für φ_{s1z} , φ_{p1z} , φ_{p2z} , und φ_{s2z} . Dann ist φ_{0z}^2 wie in (3.66) gegeben. Wir erhalten für Ω_{zmax} den in (3.67) angegebenen Ausdruck. Der Verlauf von Ω_{zmax} für $\varphi_{s1} \leq \varphi_{p0} \leq \varphi_{s0}$ wird in Bild 3.15 gezeichnet (Teil c der Kurve).

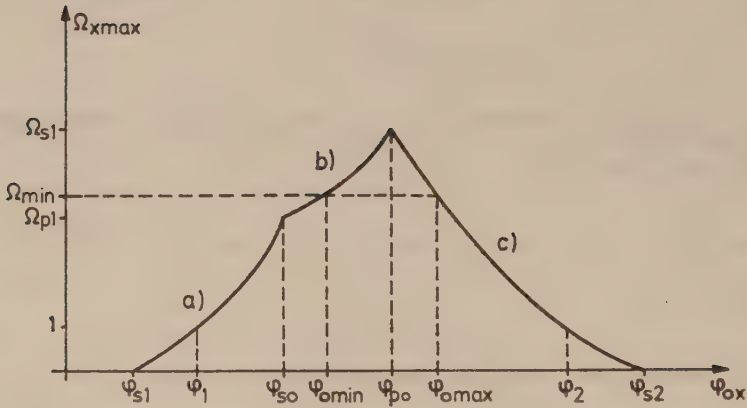


Bild 3.15 Der Verlauf von $\Omega_{x\max}$ in (3.67) für $\varphi_{s1} \leq \varphi_{ox} \leq \varphi_{so}$, in (3.78) für $\varphi_{so} \leq \varphi_{ox} \leq \varphi_{po}$ und in (3.73) für $\varphi_{po} \leq \varphi_{ox} \leq \varphi_{s2}$.

b) $\varphi_{so} \leq \varphi_{ox} \leq \varphi_{po}$.

Für $\varphi_{so} = \varphi_{po}$ ist auch $\varphi_{ox} = \varphi_{so} = \varphi_{po}$ und somit $\Omega_{x\max} = \Omega_{s1} = \Omega_{p1} = \Omega_{p2} = \Omega_{s2}$. Wir nehmen daher an, daß $\varphi_{so} < \varphi_{po}$ ist. Für $\varphi_{so} < \varphi_{ox} < \varphi_{po}$ ist weder $\varphi_{s1x} = \varphi_{s1}$ noch $\varphi_{p1x} = \varphi_{p1}$ möglich, denn dies würde gemäß (3.60b) zu $\varphi_{s2x} = \varphi_{ox}^2 / \varphi_{s1} > \varphi_{s2}$ bzw. $\varphi_{p2x} = \varphi_{ox}^2 / \varphi_{p1} < \varphi_{p2}$ führen. Die einzige Möglichkeit, alle Forderungen zu erfüllen, ist

$$\varphi_{s1x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{s2}} \quad , \quad \varphi_{p1x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{p2}} \quad , \quad \varphi_{p2x} = \varphi_{p2} \quad , \quad \varphi_{s2x} = \varphi_{s2} \quad . \quad (3.76a, b, c, d)$$

Dann ist

$$\varphi_{ox}^2 = \varphi_{p1x} \varphi_{p2} = \varphi_{s1x} \varphi_{s2} \quad (3.77)$$

und man kann nachprüfen, daß denn (3.60a) erfüllt ist. Wir erhalten

$$\Omega_{x\max} = \frac{\varphi_{p2} (\varphi_{ox}^2 - \varphi_{s2}^2)}{\varphi_{s2} (\varphi_{ox}^2 - \varphi_{p2}^2)} \quad . \quad (3.78)$$

Der Verlauf von $\Omega_{x\max}$ für $\varphi_{so} \leq \varphi_{ox} \leq \varphi_{po}$ wird in Bild 3.15 gezeichnet (Teil b der Kurve).

c) $\varphi_{so} \leq \varphi_{po} \leq \varphi_{ox} < \varphi_2$ mit $\varphi_2^2 = \varphi_{p1}\varphi_{s2}$.

Für $\varphi_{so} \leq \varphi_{po} < \varphi_{ox}$ ist weder $\varphi_{s1x} = \varphi_{s1}$ noch $\varphi_{p2x} = \varphi_{p2}$ möglich, denn dies würde gemäß (3.60b) zu $\varphi_{s2x} > \varphi_{s2}$ bzw. $\varphi_{p1x} > \varphi_{p1}$ führen. Die einzige Möglichkeit sind die in (3.71) angegebenen Werte für φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} und φ_{s2x} . Dann ist φ_{ox}^2 wie in (3.72) angegeben. Wir erhalten für Ω_{zmax} den in (3.73) angegebenen Ausdruck. Der Verlauf von Ω_{zmax} für $\varphi_{po} \leq \varphi_{ox} \leq \varphi_{s2}$ wird in Bild 3.15 gezeichnet (Teil c der Kurve).

Wir wollen nun die untere und obere Schranke von φ_{ox} bestimmen. Wir betrachten wieder die folgenden Fälle:

Fall 1

a) Wenn φ_{ox} von $\varphi_{ox} = \varphi_{po}$ aus abnimmt, dann nimmt auch Ω_{zmax} monoton von Ω_{s2} aus ab und würde für $\varphi_{ox} = \varphi_1$ den Wert $\Omega_{zmax} = 1$ und für $\varphi_{ox} = \varphi_{s1}$ den Wert null erreichen (Bild 3.14). Die zulässige Grenze wird erreicht, wenn

$$\Omega_{zmax} = \frac{\varphi_{p2} (\varphi_{ox}^2 - \varphi_{s1}^2)}{\varphi_{s1} (\varphi_{p2}^2 - \varphi_{ox}^2)} = \Omega_{min} \quad (3.79)$$

wird. Daraus folgt

$$\varphi_{ox}^2 = \varphi_{omin}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{p2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{p2} + \varphi_{s1}}{\Omega_{min}\varphi_{s1} + \varphi_{p2}} \quad (3.80)$$

b) Wenn φ_{ox} von $\varphi_{ox} = \varphi_{po}$ aus bis $\varphi_{ox} = \varphi_{so}$ zunimmt, nimmt Ω_{zmax} monoton von Ω_{s2} bis Ω_{p2} ab (Bild 3.14). Falls $\Omega_{p2} \leq \Omega_{min} \leq \Omega_{s2}$ ist, dann wird die zulässige Grenze erreicht, wenn

$$\Omega_{zmax} = \frac{\varphi_{p1} (\varphi_{ox}^2 - \varphi_{s1}^2)}{\varphi_{s1} (\varphi_{ox}^2 - \varphi_{p1}^2)} = \Omega_{min} \quad (3.81)$$

wird. Daraus folgt

$$\text{für } \Omega_{min} \geq \Omega_{p2}; \quad \varphi_{ox}^2 = \varphi_{omax}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{s1} \frac{\Omega_{min}\varphi_{p1} - \varphi_{s1}}{\Omega_{min}\varphi_{s1} - \varphi_{p1}} \quad (3.82a, b)$$

c) Wenn φ_{ox} von $\varphi_{ox} = \varphi_{so}$ aus zunimmt, dann nimmt Ω_{zmax} monoton von Ω_{p2} aus ab und würde für $\varphi_{ox} = \varphi_2$ den Wert 1 und für $\varphi_{ox} = \varphi_{s2}$ den Wert null erreichen (Bild 3.14). Falls $1 < \Omega_{min} < \Omega_{p2}$ ist, dann wird die zulässige Grenze erreicht, wenn

$$\Omega_{zmax} = \frac{\varphi_{p1} (\varphi_{ox}^2 - \varphi_{s2}^2)}{\varphi_{s2} (\varphi_{ox}^2 - \varphi_{p1}^2)} = \Omega_{min} \quad (3.83)$$

wird. Daraus folgt

$$\text{für } \Omega_{min} < \Omega_{p2}; \quad \varphi_{ox}^2 = \varphi_{omax}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{s2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{p1} + \varphi_{s2}}{\Omega_{min}\varphi_{s2} + \varphi_{p1}} \quad (3.84a, b)$$

Fall 2

a) Wenn φ_{ox} von $\varphi_{ox} = \varphi_{so}$ aus abnimmt, nimmt auch Ω_{xmax} monoton von Ω_{p1} aus ab (Bild 3.15). Falls $1 < \Omega_{min} < \Omega_{p1}$ ist, dann wird die zulässige Grenze erreicht, wenn Ω_{xmax} wie in (3.79) gleich Ω_{min} wird. Daraus folgt, daß für $\Omega_{min} < \Omega_{p1}$ $\varphi_{ox}^2 = \varphi_{omin}^2$ wie in (3.80) bestimmt wird.

b) Wenn φ_{ox} von $\varphi_{ox} = \varphi_{po}$ aus bis $\varphi_{ox} = \varphi_{so}$ abnimmt, nimmt Ω_{xmax} monoton von Ω_{s1} bis Ω_{p1} ab (Bild 3.15). Falls $\Omega_{p1} \leq \Omega_{min} \leq \Omega_{s1}$ ist, dann wird die zulässige Grenze erreicht, wenn

$$\Omega_{xmax} = \frac{\varphi_{p2} (\varphi_{ox}^2 - \varphi_{s2}^2)}{\varphi_{s2} (\varphi_{ox}^2 - \varphi_{p2}^2)} = \Omega_{min} \quad (3.85)$$

wird. Daraus folgt

$$\text{für } \Omega_{min} \geq \Omega_{p1}; \quad \varphi_{ox}^2 = \varphi_{omin}^2 = \varphi_{s2} \varphi_{p2} \frac{\Omega_{min} \varphi_{p2} - \varphi_{s2}}{\Omega_{min} \varphi_{s2} - \varphi_{p2}} \quad (3.86a, b)$$

c) Wenn φ_{ox} von $\varphi_{ox} = \varphi_{po}$ aus zunimmt, nimmt Ω_{xmax} von Ω_{s1} aus ab (Bild 3.15). Die zulässige Grenze wird erreicht, wenn Ω_{xmax} wie in (3.83) gleich Ω_{min} wird. Daraus folgt, daß $\varphi_{ox} = \varphi_{omax}$ wie in (3.84b) bestimmt wird.

Wir wählen jetzt ein $\gamma_{ox} = \gamma_o$ aus dem zulässigen Bereich $\gamma_{omin} \leq \gamma_{ox} \leq \gamma_{omax}$, also ein φ_{ox} mit $\varphi_{omin} \leq \varphi_{ox} \leq \varphi_{omax}$ und ein Ω_x mit

$$\Omega_{min} \leq \Omega_x \leq \Omega_{xmax} \quad (3.87)$$

Bei der Wahl von $\Omega_x = \Omega_{min}$ wird der ganze Spielraum voll ausgeschöpft. Da $\Omega_{min} > 1$ ist, gilt also insbesondere

$$1 < \Omega_x \leq \Omega_{xmax} \quad (3.88)$$

Aus (3.88) folgt, daß es immer Lösungen gibt, die (3.60a) erfüllen. Um dies nachzuweisen, betrachten wir die Hilfsfunktion

$$y = f(x) = x - \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 1, \quad (3.89a)$$

$$f(1) = 0 \quad (3.89b)$$

Im Definitionsbereich $x > 1$ ist $f(x)$ positiv und streng monoton steigend. Es gilt natürlich voraussetzungsgemäß

$$\varphi_{s1} < \varphi_{p1} < \varphi_{p2} < \varphi_{s2} \quad (3.90)$$

Wir werden nur für den Fall 1a die Lösungen angeben und nachweisen, daß diese Lösungen (3.60a) erfüllen. Da die anderen Fälle (Fälle 1b,c und Fälle 2a,b,c) sich ähnlich wie im Fall 1a nachweisen lassen, werden wir für diese Fälle nur die Lösungen angeben.

Fall 1

a) Es gilt

$$\varphi_1 < \varphi_{oz} \leq \varphi_{po} \leq \varphi_{so} \quad , \quad (3.91a)$$

$$\Omega_x = \frac{\varphi_{p2x} (\varphi_{oz}^2 - \varphi_{s1x}^2)}{\varphi_{s1x} (\varphi_{p2x}^2 - \varphi_{oz}^2)} = \frac{f(\varphi_{oz}/\varphi_{s1x})}{f(\varphi_{p2x}/\varphi_{oz})} \quad , \quad (3.91b)$$

$$\Omega_{zmax} = \frac{\varphi_{p2} (\varphi_{oz}^2 - \varphi_{s1}^2)}{\varphi_{s1} (\varphi_{p2}^2 - \varphi_{oz}^2)} = \frac{f(\varphi_{oz}/\varphi_{s1})}{f(\varphi_{p2}/\varphi_{oz})} \quad . \quad (3.91c)$$

Wir wollen zunächst die Bedingungen herleiten, die φ_{s1x} und φ_{p2x} erfüllen müssen. Es muß gelten

$$\varphi_{p2x} \geq \varphi_{p2} \quad \text{und} \quad \varphi_{s1} \leq \varphi_{s1x} < \varphi_{p1x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{p2x}} \quad . \quad (3.92a, b)$$

Aus (3.91) und (3.92) folgt

$$1 < \frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{po}} \leq \frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{oz}} \leq \frac{\varphi_{p2x}}{\varphi_{oz}} < \frac{\varphi_{oz}}{\varphi_{s1x}} \leq \frac{\varphi_{oz}}{\varphi_{s1}} \quad , \quad (3.93a)$$

$$0 < f\left(\frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{po}}\right) \leq f\left(\frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{oz}}\right) \leq f\left(\frac{\varphi_{p2x}}{\varphi_{oz}}\right) < f\left(\frac{\varphi_{oz}}{\varphi_{s1x}}\right) \leq f\left(\frac{\varphi_{oz}}{\varphi_{s1}}\right) \quad . \quad (3.93b)$$

Wir können aus (3.91) und (3.93) schreiben

$$\frac{\Omega_{zmax}}{\Omega_x} \frac{f(\varphi_{p2}/\varphi_{oz})}{f(\varphi_{p2x}/\varphi_{oz})} = \frac{f(\varphi_{oz}/\varphi_{s1})}{f(\varphi_{oz}/\varphi_{s1x})} \leq 1 \quad (3.94)$$

und daher

$$0 < f\left(\frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{oz}}\right) \leq f\left(\frac{\varphi_{p2x}}{\varphi_{oz}}\right) \leq \frac{\Omega_{zmax}}{\Omega_x} f\left(\frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{oz}}\right) \quad , \quad (3.95a)$$

$$\varphi_{p2} \leq \varphi_{p2x} \leq \varphi_{oz} f^{-1} \left[\frac{\Omega_{zmax}}{\Omega_x} f\left(\frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{oz}}\right) \right] \quad . \quad (3.95b)$$

Sei umgekehrt φ_{oz} gemäß (3.91a) Ω_{zmax} gemäß (3.91c) (also mit $\Omega_{zmax} > 1$, vgl. Bild 3.14) und Ω_x gemäß (3.88) gegeben. Da wegen (3.91a)

$$\frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{oz}} \geq \frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{po}} = \sqrt{\frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{p1}}} > 1 \quad (3.96)$$

ist, können wir φ_{p2x} so wählen, daß für φ_{p2x} (3.95) gilt. Wir definieren

$$\varphi_{p1x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{p2x}} \quad . \quad (3.97)$$

Es gilt dann wegen (3.91a) und (3.95b)

$$\varphi_{p1x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{p2x}} \leq \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{p2}} \leq \frac{\varphi_{po}^2}{\varphi_{p2}} = \varphi_{p1} \quad . \quad (3.98)$$

Weiterhin definieren wir φ_{s1x} durch (3.91b), also durch

$$f\left(\frac{\varphi_{0x}}{\varphi_{s1x}}\right) = \Omega_x f\left(\frac{\varphi_{p2x}}{\varphi_{0x}}\right) . \quad (3.99)$$

Da wegen (3.88) $\Omega_x > 1$ und wegen (3.95a) $f(\varphi_{p2x}/\varphi_{0x}) > 0$ ist, folgt

$$\frac{\varphi_{0x}}{\varphi_{s1x}} > \frac{\varphi_{p2x}}{\varphi_{0x}} , \quad (3.100)$$

also

$$\varphi_{s1x} < \frac{\varphi_{0x}^2}{\varphi_{p2x}} = \varphi_{p1x} . \quad (3.101)$$

Die letzte Ungleichung in (3.95a) ergibt mit (3.91c) und (3.99)

$$f\left(\frac{\varphi_{0x}}{\varphi_{s1x}}\right) \leq f\left(\frac{\varphi_{0x}}{\varphi_{s1}}\right) . \quad (3.102)$$

Da aber wegen (3.100), (3.95b) und (3.96)

$$\frac{\varphi_{0x}}{\varphi_{s1x}} > \frac{\varphi_{p2x}}{\varphi_{0x}} \geq \frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{0x}} > 1 \quad (3.103)$$

ist, folgt aus (3.102)

$$\varphi_{s1x} \geq \varphi_{s1} . \quad (3.104)$$

Weiterhin definieren wir

$$\varphi_{s2x} = \frac{\varphi_{0x}^2}{\varphi_{s1x}} . \quad (3.105)$$

Es gilt wegen (3.91a) und (3.104)

$$\varphi_{s2x} = \frac{\varphi_{0x}^2}{\varphi_{s1x}} \leq \frac{\varphi_{s0}^2}{\varphi_{s1x}} \leq \frac{\varphi_{s0}^2}{\varphi_{s1}} = \varphi_{s2} . \quad (3.106)$$

Aus (3.101) mit (3.105) folgt

$$\frac{\varphi_{s2x}}{\varphi_{0x}} = \frac{\varphi_{0x}}{\varphi_{s1x}} > \frac{\varphi_{p2x}}{\varphi_{0x}} , \quad (3.107)$$

also

$$\varphi_{s2x} > \varphi_{p2x} . \quad (3.108)$$

Schließlich ergibt sich aus (3.90), (3.95b), (3.98), (3.101), (3.104), (3.106) und (3.108) die Beziehungen in (3.60a).

Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen. Man wähle φ_{0x} so, daß

$$\varphi_1 < \varphi_{0x} \leq \varphi_{p0} \leq \varphi_{s0} \quad (3.109)$$

ist, und man definiere Ω_{zmax} durch

$$\Omega_{zmax} = \frac{\varphi_{p1} (\varphi_{oz}^2 - \varphi_{s1}^2)}{\varphi_{s1} (\varphi_{p2}^2 - \varphi_{oz}^2)} . \quad (3.110)$$

Dann ist $\Omega_{zmax} > 1$. Man wähle dann Ω_x so, daß

$$1 < \Omega_{min} \leq \Omega_x \leq \Omega_{zmax} \quad (3.111)$$

ist und wähle ein φ_{p2x} so, daß

$$\varphi_{p2} \leq \varphi_{p2x} \leq \varphi_{oz} f^{-1} \left[\frac{\Omega_{zmax}}{\Omega_x} f \left(\frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{oz}} \right) \right] \quad (3.112)$$

ist. Anschließend bestimme man φ_{p1x} , φ_{s1x} und φ_{s2x} durch

$$\varphi_{p1x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{p2x}} , \quad (3.113a)$$

$$f \left(\frac{\varphi_{oz}}{\varphi_{s1x}} \right) = \Omega_x f \left(\frac{\varphi_{p2x}}{\varphi_{oz}} \right) , \quad (3.113b)$$

$$\varphi_{s2x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{s1x}} . \quad (3.113c)$$

b) Man wähle φ_{oz} so, daß

$$\varphi_{po} \leq \varphi_{oz} \leq \varphi_{so} \quad (3.114)$$

ist, und man definiere Ω_{zmax} durch

$$\Omega_{zmax} = \frac{\varphi_{p1} (\varphi_{oz}^2 - \varphi_{s1}^2)}{\varphi_{s1} (\varphi_{oz}^2 - \varphi_{p1}^2)} = \frac{f(\varphi_{oz}/\varphi_{s1})}{f(\varphi_{oz}/\varphi_{p1})} . \quad (3.115)$$

Dann ist $\Omega_{zmax} > 1$. Man wähle dann Ω_x so, daß

$$1 < \Omega_{min} \leq \Omega_x \leq \Omega_{zmax}$$

ist und wähle ein φ_{p1x} so, daß

$$\frac{\varphi_{oz}}{f^{-1} [(\Omega_{zmax}/\Omega_x) f(\varphi_{oz}/\varphi_{p1})]} \leq \varphi_{p1x} \leq \varphi_{p1} \quad (3.116)$$

ist. Anschließend bestimme man φ_{p2x} , φ_{s1x} und φ_{s2x} durch

$$\varphi_{p2x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{p1x}} , \quad (3.117a)$$

$$f \left(\frac{\varphi_{oz}}{\varphi_{s1x}} \right) = \Omega_x f \left(\frac{\varphi_{oz}}{\varphi_{p1x}} \right) , \quad (3.117b)$$

$$\varphi_{s2x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{s1x}} . \quad (3.117c)$$

c) Man wähle φ_{oz} so, daß

$$\varphi_{po} \leq \varphi_{so} \leq \varphi_{oz} \quad (3.118)$$

ist, und man definiere Ω_{zmax} durch

$$\Omega_{zmax} = \frac{\varphi_{p1} (\varphi_{s2}^2 - \varphi_{oz}^2)}{\varphi_{s2} (\varphi_{oz}^2 - \varphi_{p1}^2)} = \frac{f(\varphi_{s2}/\varphi_{oz})}{f(\varphi_{oz}/\varphi_{p1})} \quad (3.119)$$

Dann ist $\Omega_{zmax} > 1$. Man wähle dann Ω_x so, daß

$$1 < \Omega_{min} \leq \Omega_x \leq \Omega_{zmax} \quad (3.120)$$

ist und wähle ein φ_{p1x} so, daß

$$\frac{\varphi_{oz}}{f^{-1}[(\Omega_{zmax}/\Omega_x)f(\varphi_{oz}/\varphi_{p1})]} \leq \varphi_{p1x} \leq \varphi_{p1} \quad (3.121)$$

ist. Anschließend bestimme man φ_{p2x} , φ_{s2x} und φ_{s1x} durch

$$\varphi_{p2x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{p1x}} \quad , \quad (3.122a)$$

$$f\left(\frac{\varphi_{s2x}}{\varphi_{oz}}\right) = \Omega_x f\left(\frac{\varphi_{oz}}{\varphi_{p1x}}\right) \quad , \quad (3.122b)$$

$$\varphi_{s1x} = \frac{\varphi_{oz}^2}{\varphi_{s2x}} \quad . \quad (3.122c)$$

Fall 2

a) Gleiche Lösungen wie im Fall 1a.

b) Man wähle φ_{oz} so, daß

$$\varphi_{so} \leq \varphi_{oz} \leq \varphi_{po} < \varphi_2 \quad , \quad (3.123)$$

ist, und definiere Ω_{zmax} durch

$$\Omega_{zmax} = \frac{\varphi_{p2} (\varphi_{s2}^2 - \varphi_{oz}^2)}{\varphi_{s2} (\varphi_{p2}^2 - \varphi_{oz}^2)} = \frac{f(\varphi_{s2}/\varphi_{oz})}{f(\varphi_{p2}/\varphi_{oz})} \quad (3.124)$$

Dann ist $\Omega_{zmax} > 1$. Man wähle dann Ω_x so, daß

$$1 < \Omega_{min} \leq \Omega_x \leq \Omega_{zmax} \quad (3.125)$$

ist und wähle ein φ_{p2x} so, daß

$$\varphi_{p2} \leq \varphi_{p2x} \leq \varphi_{ox} f^{-1} \left[\frac{\Omega_{xmax}}{\Omega_x} f\left(\frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{ox}}\right) \right] \quad (3.126)$$

ist. Anschließend bestimme man φ_{p1x} , φ_{s2x} und φ_{s1x} durch

$$\varphi_{p1x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{p2x}} \quad , \quad (3.127a)$$

$$f\left(\frac{\varphi_{s2x}}{\varphi_{ox}}\right) = \Omega_x f\left(\frac{\varphi_{p2x}}{\varphi_{ox}}\right) \quad , \quad (3.127b)$$

$$\varphi_{s1x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{s2x}} \quad . \quad (3.127c)$$

c) Gleiche Lösungen wie im Fall 1c.

Nach der Bestimmung von φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} und φ_{s2x} wird die Durchlaßgrenze φ_{lpz} und die Sperrgrenze φ_{ispz} des Tiefpasses durch (3.29) bestimmt. Nach dem Entwurf des Tiefpasses mit diesen Frequenzen und der diskreten Optimierung seiner Multipliziererkoeffizienten wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses durch das in Bild 3.9d angegebene Wellenflußdiagramm mit dem gewählten Adaptorkoeffizienten γ_{ox} ersetzt. Damit wird der Entwurf eines Bandpasses mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten auf den Entwurf eines passend gewählten Tiefpasses mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten zurückgeführt.

3.4 Tiefpaß-Bandsperre-Transformation

Wir betrachten die in Bild 3.16 angegebenen Dämpfungsanforderungen einer Bandsperre mit den Grenzfrequenzen des Durchlaßbereiches f_{p1}, f_{p2} und des Sperrbereiches f_{s1}, f_{s2} .

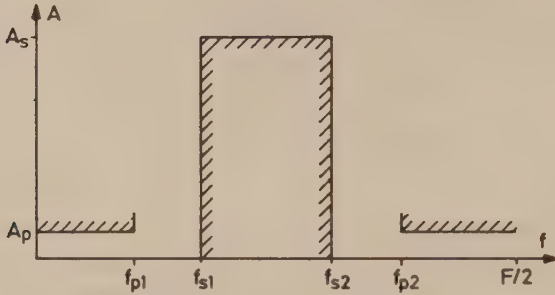


Bild 3.16 Dämpfungsanforderungen einer Bandsperre.

Die Grenzfrequenzen im Referenzbereich sind durch (3.25) bestimmt. Der Entwurf dieser Bandsperre kann mit Hilfe der Tiefpaß-Bandsperre-Transformation

$$\psi_l = \frac{\psi}{\beta_{ox}(\psi^2 + \varphi_{ox}^2)} \quad (3.128)$$

auf den Entwurf eines Tiefpasses zurückgeführt werden, wobei

$$\varphi_{p1x}\varphi_{p2x} = \varphi_{s1x}\varphi_{s2x} \quad (3.129a)$$

und

$$\varphi_{p1} \leq \varphi_{p1x} < \varphi_{s1x} \leq \varphi_{s1} < \varphi_{s2} \leq \varphi_{s2x} < \varphi_{p2x} \leq \varphi_{p2} \quad (3.129b)$$

gilt und φ_{ox} die durch

$$\varphi_{ox}^2 = \varphi_{p1x}\varphi_{p2x} = \varphi_{s1x}\varphi_{s2x} \quad (3.129c)$$

definierte positive Größe ist. Für $\psi = j\varphi$ erhalten wir aus (3.128) $\psi_l = j\varphi_l$, wobei

$$\varphi_l = \frac{\varphi}{\beta_{ox}(\varphi^2 - \varphi_{ox}^2)} \quad (3.130)$$

ist. Die Durchlaßgrenze φ_{lpz} und die Sperrgrenze φ_{lsz} des Tiefpasses wird durch

$$\varphi_{lpz} = \frac{1}{\beta_{ox}(\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x})} \quad (3.131a)$$

und

$$\varphi_{lsz} = \frac{1}{\beta_{ox}(\varphi_{s2z} - \varphi_{s1z})} \quad (3.131b)$$

bestimmt.

Wir betrachten in Bild 3.1a das Wellenflußdiagramm des Tiefpasses mit den Grenzfrequenzen φ_{lpz} und φ_{lsz} gemäß (3.131). Aus diesem Tiefpaß soll durch die Tiefpaß-Bandsperre-Transformation (3.128) das Wellenflußdiagramm der Bandsperre hergeleitet werden. Wir betrachten in Bild 3.17a ein Verzögerungselement, welches in Bild 3.1a an dem Tor ν mit dem Torwiderstand R_ν abgeschlossen ist, wobei $3 \leq \nu \leq n$ ist.

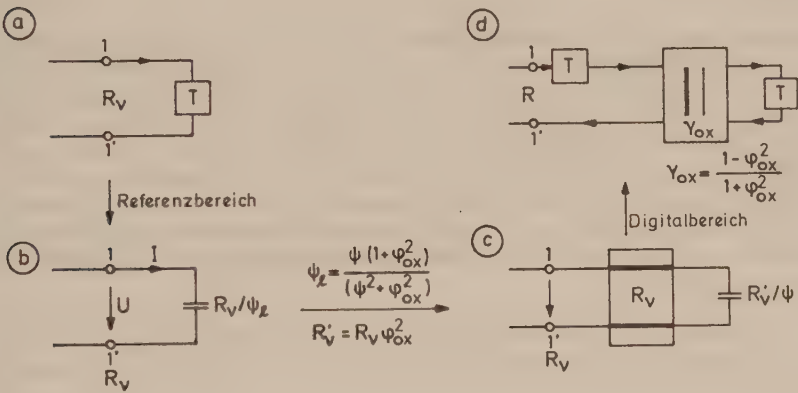


Bild 3.17 (a) Ein Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses, (b) Kapazität in Referenzschaltung des Tiefpasses, (c) Referenzeintor nach der Tiefpaß-Bandsperre-Transformation (3.128) mit (3.37), (d) das Wellenflußdiagramm des in (c) angegebenen Eintors.

Dieses Verzögerungselement entspricht einer Kapazität in Referenzschaltung mit der Impedanz gemäß (3.39) (Bild 3.17b). Durch die Tiefpaß-Bandsperre-Transformation (3.128) wird diese Impedanz wie folgt geändert:

$$Z'(\psi) = \frac{R_\nu \beta_{ox}(\psi^2 + \varphi_{ox}^2)}{\psi} \quad (3.132)$$

Wählen wir β_{ox} so, daß $Z'(1) = 1$ ist, also $\beta_{ox} = 1/(1 + \varphi_{ox}^2)$, so entspricht diese Impedanz der Eingangsimpedanz des in Bild 3.17c angegebenen Eintors mit einem Leitungselement mit dem Wellenwiderstand R_ν und einer Kapazität mit der Impedanz $Z_C = R_\nu'/\psi$,

wobei $R'_\nu = R_\nu \varphi_{ox}^2$ ist. Das Wellenflußdiagramm dieses Eintors wird in Bild 3.17d angegeben [2,5], wobei der Multipliziererkoeffizient γ_{ox} des Zweitor-Paralleladaptors durch

$$\gamma_{ox} = \frac{1 - \varphi_{ox}^2}{1 + \varphi_{ox}^2} \quad (3.133)$$

bestimmt wird und nur von φ_{ox} abhängt. Durch die Änderung von φ_{ox} läßt sich wie im Bandpaßfall für den Koeffizienten γ_{ox} ein zulässiger Bereich bestimmen. Die im Abschnitt 3.3 hergeleiteten Gleichungen und Ungleichungen für die Bestimmung des zulässigen Bereiches für γ_{ox} können hier direkt benutzt werden, wenn die Indizes der Größen durch

$$p \rightarrow s, \quad s \rightarrow p \quad (3.134a, b)$$

umgetauscht werden. Die Beziehung zwischen γ_{ox} und φ_{ox} ist durch (3.133) gegeben. Nach der geeigneten Wahl von φ_{ox} bzw. γ_{ox} und Ω_x und der Bestimmung der Frequenzgrößen φ_{p1x} , φ_{s1x} , φ_{s2x} und φ_{p2x} wird der Tiefpaß mit der Durchlaßgrenze φ_{lpz} in (3.131a) und der Sperrgrenze φ_{lsz} in (3.131b) entworfen. Nach der diskreten Optimierung der Multipliziererkoeffizienten dieses Tiefpasses wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses durch das in Bild 3.17d angegebene Wellenflußdiagramm mit dem Adaptorkoeffizienten γ_{ox} ersetzt. Damit wird der Entwurf einer Bandsperre mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten auf den Entwurf eines passend gewählten Tiefpasses mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten zurückgeführt.

In der Tabelle 3.1 werden die Frequenztransformationen zusammengestellt. Die Ergebnisse für die Bestimmung des zulässigen Bereiches von γ_{ox} für Bandpässe und Bandsperren werden in den Tabellen 3.2 und 3.3 zusammengefaßt.

TABELLE 3.1
Frequenztransformationen für Wellendigitalfilter

Transformation	Grenzfrequenzen des Tiefpasses	Grenzfrequenzen
Tiefpaß-Tiefpaß $\psi_l = \frac{\psi}{\varphi_o}$	f_{lp}, f_{ls} $\varphi_{lp} = \tan\left(\frac{\pi f_{lp}}{F}\right)$ $\varphi_{ls} = \tan\left(\frac{\pi f_{ls}}{F}\right)$ $\varphi_o = \frac{\varphi_{lpt}}{\varphi_{lp}} = \frac{\varphi_{lst}}{\varphi_{ls}}$	Tiefpaß f_{lpt}, f_{lst} $\varphi_{lpt} = \tan\left(\frac{\pi f_{lpt}}{F}\right)$ $\varphi_{lst} = \tan\left(\frac{\pi f_{lst}}{F}\right)$
Tiefpaß-Hochpaß $\psi_l = \frac{1}{\psi}$	$f_{lp} = F/2 - f_{hp}$ $f_{ls} = F/2 - f_{hs}$ $\varphi_{lp} = \frac{1}{\varphi_{hp}}$ $\varphi_{ls} = \frac{1}{\varphi_{hs}}$	Hochpaß f_{hp} f_{hs} $\varphi_{hp} = \tan\left(\frac{\pi f_{hp}}{F}\right)$ $\varphi_{hs} = \tan\left(\frac{\pi f_{hs}}{F}\right)$
Tiefpaß-Bandpaß $\psi_l = \beta_{oz} \frac{\psi^2 + \varphi_{oz}^2}{\psi}$ $\beta_{oz} = \frac{1}{1 + \varphi_{oz}^2}$ $\varphi_{oz}^2 = \varphi_{p1x} \varphi_{p2x} = \varphi_{s1x} \varphi_{s2x}$ $\varphi_{s1} \leq \varphi_{s1x} < \varphi_{p1x} \leq \varphi_{p1}$ $< \varphi_{p2} \leq \varphi_{p2x} < \varphi_{s2x} \leq \varphi_{s2}$	$\varphi_{lpz} = \beta_{oz} (\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x})$ $\varphi_{lsz} = \beta_{oz} (\varphi_{s2x} - \varphi_{s1x})$ $f_{lpz} = (F/\pi) \arctan(\varphi_{lpz})$ $f_{lsz} = (F/\pi) \arctan(\varphi_{lsz})$	Bandpaß $f_{p1}, f_{p2}, f_{s1}, f_{s2}$ $\varphi_{p1} = \tan\left(\frac{\pi f_{p1}}{F}\right)$ $\varphi_{p2} = \tan\left(\frac{\pi f_{p2}}{F}\right)$ $\varphi_{s1} = \tan\left(\frac{\pi f_{s1}}{F}\right)$ $\varphi_{s2} = \tan\left(\frac{\pi f_{s2}}{F}\right)$
Tiefpaß-Bandsperre $\psi_l = \frac{\psi}{\beta_{oz} (\psi^2 + \varphi_{oz}^2)}$ $\beta_{oz} = \frac{1}{1 + \varphi_{oz}^2}$ $\varphi_{oz}^2 = \varphi_{p1x} \varphi_{p2x} = \varphi_{s1x} \varphi_{s2x}$ $\varphi_{p1} \leq \varphi_{p1x} < \varphi_{s1x} \leq \varphi_{s1}$ $< \varphi_{s2} \leq \varphi_{s2x} < \varphi_{p2x} \leq \varphi_{p2}$	$\varphi_{lpz} = \frac{1}{\beta_{oz} (\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x})}$ $\varphi_{lsz} = \frac{1}{\beta_{oz} (\varphi_{s2x} - \varphi_{s1x})}$ $f_{lpz} = (F/\pi) \arctan(\varphi_{lpz})$ $f_{lsz} = (F/\pi) \arctan(\varphi_{lsz})$	Bandsperre $f_{p1}, f_{p2}, f_{s1}, f_{s2}$ $\varphi_{p1} = \tan\left(\frac{\pi f_{p1}}{F}\right)$ $\varphi_{p2} = \tan\left(\frac{\pi f_{p2}}{F}\right)$ $\varphi_{s1} = \tan\left(\frac{\pi f_{s1}}{F}\right)$ $\varphi_{s2} = \tan\left(\frac{\pi f_{s2}}{F}\right)$

TABELLE 3.2

Bestimmung des zulässigen Bereiches für γ_{0x} für Bandpässe

Es gelte : $\varphi_{p0}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{p2}$, $\varphi_{s0}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{s2}$

Zulässiger Bereich für γ_{0x} : $\gamma_{0min} \leq \gamma_{0x} \leq \gamma_{0max}$

$$\gamma_{0min} = \frac{\varphi_{0min}^2 - 1}{\varphi_{0min}^2 + 1} , \quad \gamma_{0max} = \frac{\varphi_{0max}^2 - 1}{\varphi_{0max}^2 + 1}$$

Fall 1 : $\varphi_{s0} \geq \varphi_{p0}$

$$\Omega_{max} = \Omega_{s2} = \frac{\varphi_{p1}\varphi_{p2} - \varphi_{s1}^2}{(\varphi_{p2} - \varphi_{p1})\varphi_{s1}} , \quad \Omega_{p2} = \frac{(\varphi_{s2} - \varphi_{s1})\varphi_{p1}}{\varphi_{s1}\varphi_{s2} - \varphi_{p1}^2}$$

a) $\varphi_{0min}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{p2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{p2} + \varphi_{s1}}{\Omega_{min}\varphi_{s1} + \varphi_{p2}}$

b) Für $\Omega_{min} \geq \Omega_{p2}$; $\varphi_{0max}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{s1} \frac{\Omega_{min}\varphi_{p1} - \varphi_{s1}}{\Omega_{min}\varphi_{s1} - \varphi_{p1}}$

c) Für $\Omega_{min} < \Omega_{p2}$; $\varphi_{0max}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{s2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{p1} + \varphi_{s2}}{\Omega_{min}\varphi_{s2} + \varphi_{p1}}$

Fall 2 : $\varphi_{s0} \leq \varphi_{p0}$

$$\Omega_{max} = \Omega_{s1} = \frac{\varphi_{s2}^2 - \varphi_{p1}\varphi_{p2}}{(\varphi_{p2} - \varphi_{p1})\varphi_{s2}} , \quad \Omega_{p1} = \frac{(\varphi_{s2} - \varphi_{s1})\varphi_{p2}}{\varphi_{p2}^2 - \varphi_{s1}\varphi_{s2}}$$

a) $\varphi_{0min}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{p2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{p2} + \varphi_{s1}}{\Omega_{min}\varphi_{s1} + \varphi_{p2}}$

b) Für $\Omega_{min} \geq \Omega_{p1}$; $\varphi_{0min}^2 = \varphi_{p2}\varphi_{s2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{p2} - \varphi_{s2}}{\Omega_{min}\varphi_{s2} - \varphi_{p2}}$

c) Für $\Omega_{min} < \Omega_{p1}$; $\varphi_{0max}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{s2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{p1} + \varphi_{s2}}{\Omega_{min}\varphi_{s2} + \varphi_{p1}}$

Grenzfrequenzen des Tiefpasses :

$$\varphi_{lpz} = \beta_{0x}(\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x}) , \quad \varphi_{lsz} = \beta_{0x}(\varphi_{s2x} - \varphi_{s1x}) , \quad \beta_{0x} = 1/(1 + \varphi_{0x}^2)$$

TABELLE 3.3

Bestimmung des zulässigen Bereiches für γ_{oz} für Bandsperren

Es gelte : $\varphi_{po}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{p2}$, $\varphi_{so}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{s2}$

Zulässiger Bereich für γ_{oz} : $\gamma_{omin} \leq \gamma_{oz} \leq \gamma_{omaz}$

$$\gamma_{omin} = \frac{1 - \varphi_{omaz}^2}{1 + \varphi_{omaz}^2} , \quad \gamma_{omaz} = \frac{1 - \varphi_{omin}^2}{1 + \varphi_{omin}^2}$$

Fall 1 : $\varphi_{po} \geq \varphi_{so}$

$$\Omega_{maz} = \Omega_{p2} = \frac{\varphi_{s1}\varphi_{s2} - \varphi_{p1}^2}{(\varphi_{s2} - \varphi_{s1})\varphi_{p1}} , \quad \Omega_{s2} = \frac{(\varphi_{p2} - \varphi_{p1})\varphi_{s1}}{\varphi_{p1}\varphi_{p2} - \varphi_{s1}^2}$$

a) $\varphi_{omin}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{s2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{s2} + \varphi_{p1}}{\Omega_{min}\varphi_{p1} + \varphi_{s2}}$

b) Für $\Omega_{min} \geq \Omega_{s2}$; $\varphi_{omaz}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{p1} \frac{\Omega_{min}\varphi_{s1} - \varphi_{p1}}{\Omega_{min}\varphi_{p1} - \varphi_{s1}}$

c) Für $\Omega_{min} < \Omega_{s2}$; $\varphi_{omaz}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{p2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{s1} + \varphi_{p2}}{\Omega_{min}\varphi_{p2} + \varphi_{s1}}$

Fall 2 : $\varphi_{po} \leq \varphi_{so}$

$$\Omega_{maz} = \Omega_{p1} = \frac{\varphi_{p2}^2 - \varphi_{s1}\varphi_{s2}}{(\varphi_{s2} - \varphi_{s1})\varphi_{p2}} , \quad \Omega_{s1} = \frac{(\varphi_{p2} - \varphi_{p1})\varphi_{s2}}{\varphi_{s2}^2 - \varphi_{p1}\varphi_{p2}}$$

a) $\varphi_{omin}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{s2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{s2} + \varphi_{p1}}{\Omega_{min}\varphi_{p1} + \varphi_{s2}}$

b) Für $\Omega_{min} \geq \Omega_{s1}$; $\varphi_{omin}^2 = \varphi_{s2}\varphi_{p2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{s2} - \varphi_{p2}}{\Omega_{min}\varphi_{p2} - \varphi_{s2}}$

c) Für $\Omega_{min} < \Omega_{s1}$; $\varphi_{omaz}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{p2} \frac{\Omega_{min}\varphi_{s1} + \varphi_{p2}}{\Omega_{min}\varphi_{p2} + \varphi_{s1}}$

Grenzfrequenzen des Tiefpasses :

$$\varphi_{lpx} = \frac{1}{\beta_{oz}(\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x})} , \quad \varphi_{lsz} = \frac{1}{\beta_{oz}(\varphi_{s2x} - \varphi_{s1x})} , \quad \beta_{oz} = \frac{1}{1 + \varphi_{oz}^2}$$

3.5 Beispiele für die Frequenztransformationen

Beispiel 1

Die Dämpfungsanforderungen zweier komplementärer Filter (Bild 3.3) sind durch

$$f_{lp} = f_{hs} = 3.4 \text{ kHz} \quad , \quad f_{ls} = f_{hp} = 4.6 \text{ kHz} \quad , \quad F = 24 \text{ kHz} \quad ,$$

$$A_s = 60 \text{ dB} \quad , \quad 10^{-A_s/10} + 10^{-A_p/10} = 1$$

gegeben. Zunächst wird der notwendige Grad des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters mit der Sperrgrenze

$$\varphi_{bs} = \frac{1}{\varphi_{bp}} = \sqrt{\frac{\varphi_s}{\varphi_p}} = 1.2$$

mit Hilfe von im Anhang angegebenen Formeln (A.1)-(A.5) berechnet, wobei φ_s und φ_p gemäß (3.13) bestimmt werden. Diese Dämpfungsanforderungen können mit einem Cauerparameterfilter 11.Grades erfüllt werden. Mit Hilfe von im Anhang angegebenen Formeln (A.6)-(A.10) läßt sich die minimal zulässige Sperrgrenze φ_{bs1} bzw. die maximal zulässige Durchlaßgrenze φ_{bp1} bestimmen:

$$\varphi_{bs1} = \frac{1}{\varphi_{bp1}} = \Omega_{min} = 1.119 \ 241 \quad .$$

Mit Hilfe von (3.20) können wir für die Koeffizienten γ_{1t} den folgenden zulässigen Bereich angeben:

$$0.452 \ 359 \leq \gamma_{1tx} \leq 0.556 \ 424 \quad .$$

Wegen des einfachen Realisierungsaufwandes wählen wir den Koeffizientenwert $\gamma_{1tx} = \gamma_o = 0.5$ und damit gemäß (3.21) $\varphi'_o = 0.577$. Das bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter mit der Grenzfrequenz

$$\varphi'_{bs} = \frac{1}{\varphi'_{bp}} = \min \left\{ \frac{\varphi_s}{\varphi'_o}, \frac{\varphi'_o}{\varphi_p} \right\} = 1.19$$

wird entworfen. Die idealen Multipliziererkoeffizienten eines bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters können entweder durch die expliziten Formeln [15] berechnet werden oder aus dem Filterkatalog [29,30] ohne Berechnung direkt entnommen werden. Bild 3.18 zeigt das Wellenflußdiagramm des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters mit den idealen Multipliziererkoeffizienten für $\gamma_o = 0.5$. Durch (3.10), (3.11) werden die Adaptorkoeffizienten des transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters berechnet, wobei in (3.10), (3.11) φ_o durch φ'_o ersetzt werden soll. Die diskrete Optimierung der restlichen Multipliziererkoeffizienten wurden mit dem im Kapitel 4 beschriebenen Optimierungsalgorithmus durchgeführt. Die Zahl der Addierer, die für die Realisierung der gesamten Multiplizierer benötigt wird, ist 14. Bild 3.19a,b zeigt das Wellenflußdiagramm des transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters, die idealen und die diskret optimierten Koeffizientenwerte für $\gamma_o = 0.5$. Die Dämpfungsverläufe von zwei komplementären Filtern mit idealen Multipliziererkoeffizienten (durchgezogene Linien) bzw. mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten (punktierter Linien) für $\gamma_o = 0.5$ sind in Bild 3.19c gezeichnet.

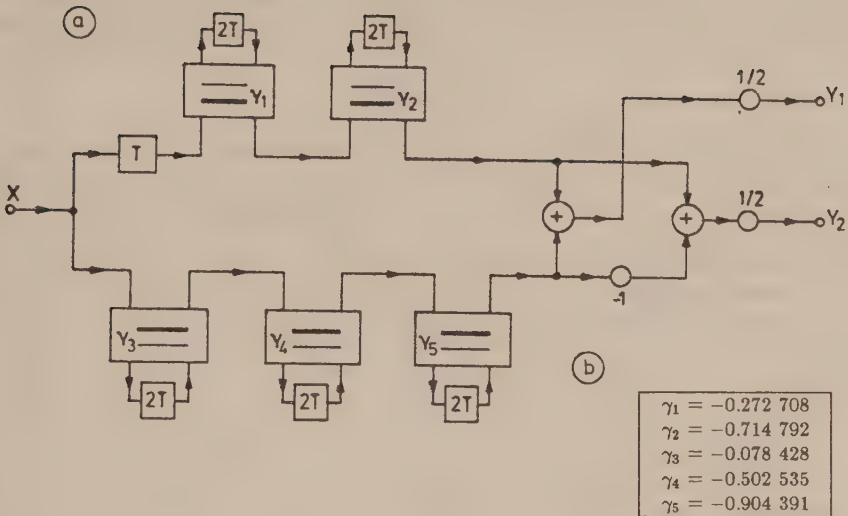


Bild 3.18 (a) Wellenflußdiagramm des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters Tiefpaß 11. Grades, (b) die idealen Werte der Adaptorkoeffizienten.

Beispiel 2

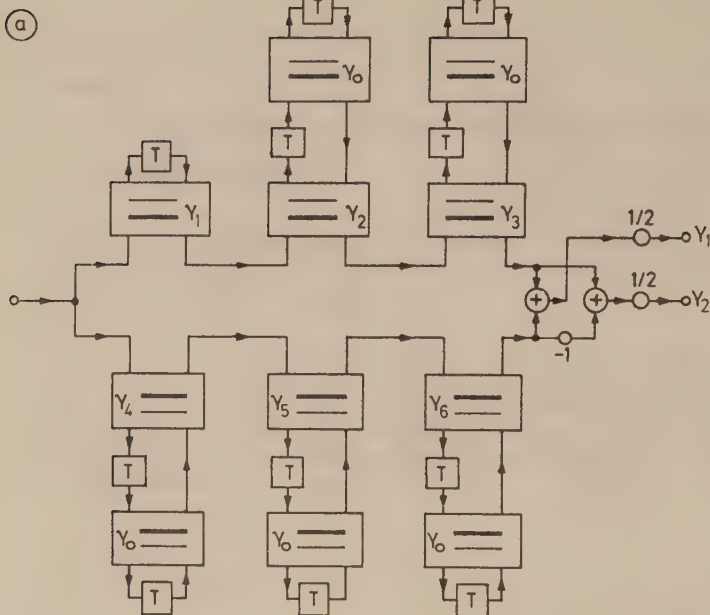
Dämpfungsanforderungen eines Bandpasses sind gemäß Bild 3.6 wie folgt gegeben:

$$f_{s1} = 3.4 \text{ kHz} \quad , \quad f_{s2} = 8.3 \text{ kHz} \quad , \quad f_{p1} = 4.6 \text{ kHz} \quad , \quad f_{p2} = 7.6 \text{ kHz} \quad ,$$

$$F = 48 \text{ kHz} \quad , \quad A_s = 60 \text{ dB} \quad , \quad A_p = 0.2 \text{ dB} \quad .$$

Diese Dämpfungsanforderungen können durch die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation gemäß (3.26), (3.27) auf die Dämpfungsanforderungen eines Tiefpasses zurückgeführt werden. Da $\varphi_{s0} < \varphi_{p0}$ mit $\varphi_{s0} = 0.369$ und $\varphi_{p0} = 0.410$ ist, gilt der Fall 2. Dann ist $\Omega_{max} = \Omega_{s1} = 1.396$. Ausgehend von dem maximalen Wert Ω_{max} von Ω_x wird der notwendige Grad $N = 7$ und der minimal zulässige Wert $\Omega_{min} = 1.285$ des Tiefpasses mit Hilfe von im Anhang angegebenen Formeln bestimmt, wobei für die diskrete Optimierung der Multipliziererkoeffizienten des Tiefpasses 0.05 dB Spielraum im Durchlaßbereich und der restliche Spielraum im Sperrbereich gelassen wird. Mit Ω_{min} wird der zulässige Bereich von γ_{oz} mit Hilfe von (3.80), (3.84) und (3.41) wie folgt bestimmt:

$$-0.760\ 347 \leq \gamma_{oz} \leq -0.704\ 904 \quad .$$



(b)

$\gamma_0 = 0.5$	$\gamma_0 = 0.1$
$\gamma_1 = 0.267\ 949$	$\gamma_1 = 0.010001001001$
$\gamma_2 = -0.337\ 889$	$\gamma_2 = 0.10101010101$
$\gamma_3 = -0.748\ 192$	$\gamma_3 = -1.01\ (\gamma_3'' = 0.01)$
$\gamma_4 = -0.149\ 383$	$\gamma_4 = 0.0010101001$
$\gamma_5 = -0.554\ 331$	$\gamma_5 = 0.1001001\ (\gamma_5'' = 0.1001001)$
$\gamma_6 = -0.916\ 666$	$\gamma_6 = -1.00010101\ (\gamma_6'' = 0.00010101)$

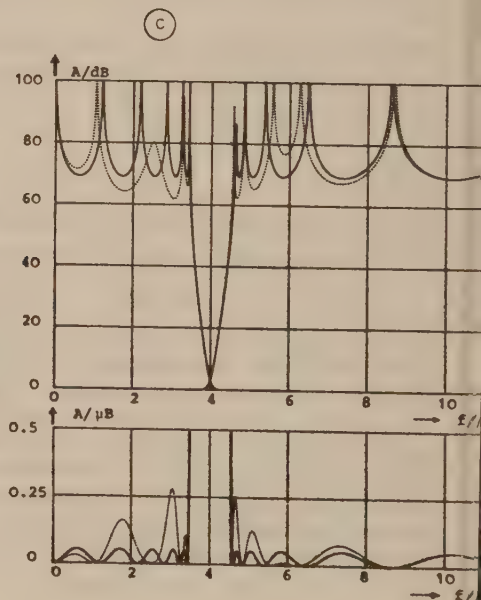


Bild 3.19 (a) Wellenflußdiagramm des Tiefpaß-Tiefpaß transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters 11. Grades, (b) die idealen und die im CSD-Code diskret optimierten Werte der Multipliziererkoeffizienten, (Koeffizientenwerte der jeweils günstigsten äquivalenten Zweitor-Paralleladaptoren in Klammern, vgl. Bild 2.6), (c) Dämpfungsverläufe von zwei komplementären Filtern mit idealen (durchgezogene Linien) bzw. diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten (punktuelle Linien) für $\gamma_0 = 0.5$.

Aus diesem zulässigen Bereich wählen wir den Wert $\gamma_{0x} = -0.75$ bzw. $\varphi_{0x} = 0.377$, da der Realisierungsaufwand des Koeffizienten mit diesem Wert am geringsten ist, wenn man die Anzahl der von Null verschiedenen Binärstellen der Koeffizienten minimieren will. Da für $\varphi_{0x} = 0.377$ die Beziehung in (3.123) gilt, können wir Ω_x gemäß (3.124) und (3.125) aus dem Bereich

$$1.285 \leq \Omega_x \leq 1.312$$

wählen. Wir wählen $\Omega_x = 1.312$ und $\varphi_{p2x} = \varphi_{p2} = 0.542$. Gemäß (3.127) bestimmen wir $\varphi_{p1x} = 0.263$ bzw. $f_{p1x} = 3.93 \text{ kHz}$, $\varphi_{s2x} = 0.603 \text{ kHz}$ bzw. $f_{s2x} = 8.3 \text{ kHz}$ und $\varphi_{s1x} = 0.236$ bzw. $f_{s1x} = 3.55 \text{ kHz}$. Mit Hilfe von (3.29) bestimmen wir die Durchlaßgrenze des Tiefpasses $\varphi_{lpz} = 0.244$ bzw. $f_{lpz} = 3.669 \text{ kHz}$ und die Sperrgrenze des Tiefpasses $\varphi_{lsz} = 0.321$ bzw. $f_{lsz} = 4.75 \text{ kHz}$. Nach dem Entwurf des Tiefpasses (Bild 3.20a) und der diskreten Optimierung seiner Koeffizienten wird jedes Verzögerungselement gemäß Bild 3.9d durch zwei Verzögerungselemente, einen Vorzeichenumkehrer und einen Zweitor-Paralleladaptor mit dem Multipliziererkoeffizienten $\gamma_{0x} = -0.75$ ersetzt (Bild 3.20b). Die diskrete Optimierung der Multipliziererkoeffizienten des Tiefpasses wird mit dem im Kapitel 4 beschriebenen Optimierungsalgorithmus durchgeführt. Die idealen und diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten des Tiefpasses sind in Bild 3.20c angegeben. Mit Hilfe von äquivalenten Adaptoren (Bild 2.6) können die Beträge aller Adaptorkoeffizienten auf 0.5 beschränkt werden. Die Koeffizientenwerte der sich dadurch ergebenden günstigsten äquivalenten Adaptoren sind in Bild 3.20c angegeben. Die Gesamtzahl der Addierer, die für die Realisierung der gesamten Multiplizierer benötigt werden, ist 14. Bild 3.20e zeigt die Dämpfungsverläufe im Sperr- und Durchlaßbereich des Bandpasses mit idealen Multipliziererkoeffizienten (durchgezogene Linien) bzw. diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten (punktierte Linien) für $\gamma_{0x} = -0.75$.

Wenn wir die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (3.26) direkt in der Übertragungsfunktion des Tiefpasses durchführen, erhalten wir das in Bild 3.21a angegebene Wellenflußdiagramm des Bandpasses vom 14. Grad. In diesem Fall haben wir 14 verschiedene Multipliziererkoeffizienten (Bild 3.21b) und alle diese Koeffizienten sollen diskret optimiert werden. Nach der diskreten Optimierung der Multipliziererkoeffizienten erhalten wir die diskrete Lösung mit insgesamt 21 Addierern, d.h., die Gesamtzahl der Addierer, die für die Realisierung der Multipliziererkoeffizienten benötigt werden, ist 21. Bild 3.21b zeigt die diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten und die Multipliziererkoeffizienten von äquivalenten Zweitor-Paralleladaptoren. Die Dämpfungsverläufe mit den idealen Multipliziererkoeffizienten (durchgezogene Linien) bzw. diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten (punktierte Linien) wurden in Bild 3.21c dargestellt.

Wenn wir die beiden Lösungen (Bild 3.20 und 3.21) vergleichen, stellen wir folgendes fest:

1. Mit Hilfe der oben geschilderten Frequenztransformationen wird der Realisierungsaufwand der Multipliziererkoeffizienten erheblich reduziert.
2. Im ersten Fall ist lediglich die diskrete Optimierung von 7 Koeffizienten und im zweiten Fall von 14 Koeffizienten erforderlich. Dadurch wird auch der Rechenaufwand für die diskrete Optimierung erheblich reduziert.

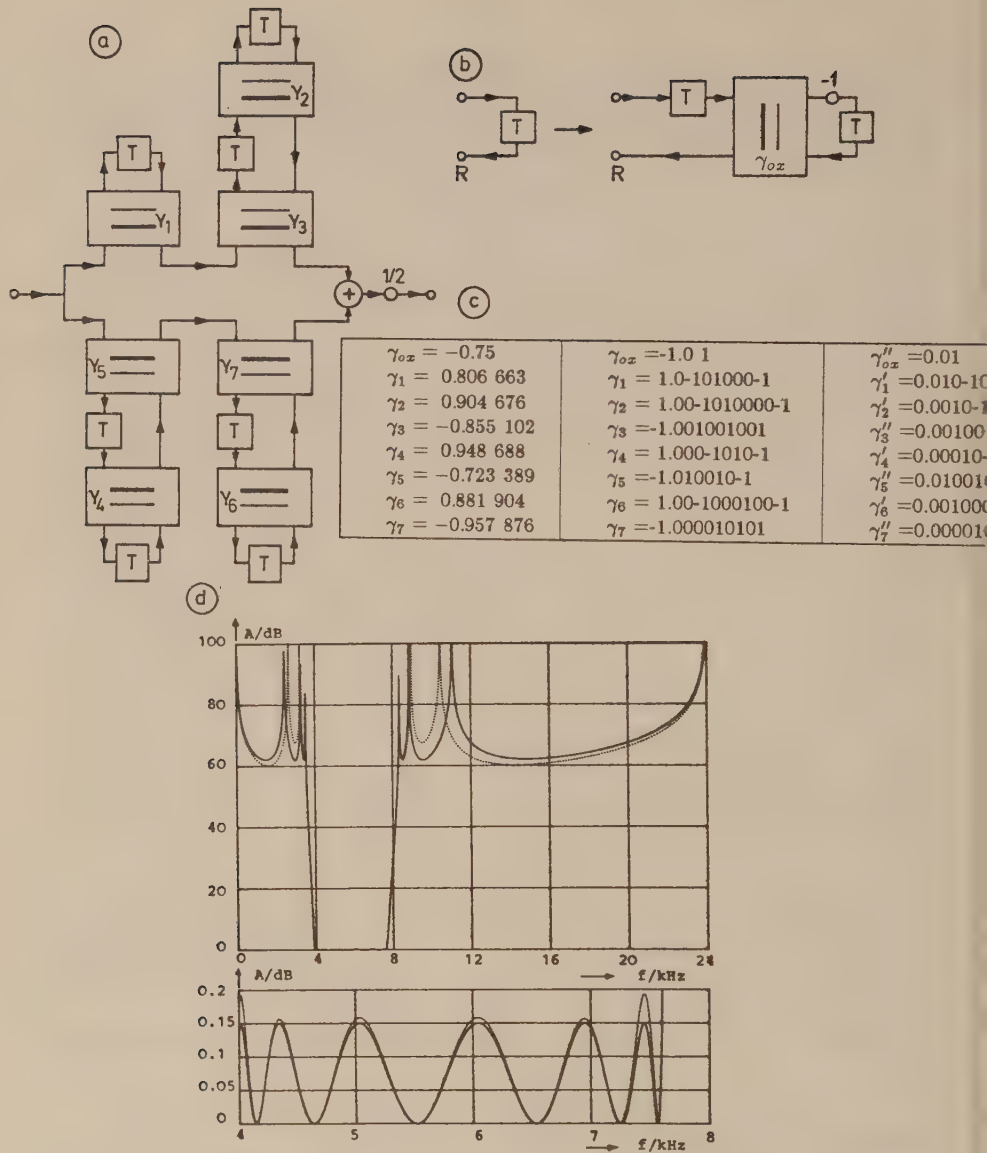


Bild 3.20 (a) Wellenflußdiagramm des Brücken-Wellendigitalfilters, Tiefpaß 7. Grades, (b) jedes Verzögerungselement im Tiefpaßfilter wird durch das entsprechende Wellenflußdiagramm ersetzt, (c) die idealen und die im CSD-Kode diskret optimierten Werte der Multipliziererkoeffizienten und die Koeffizientenwerte der jeweils günstigsten äquivalenten Adaptoren (vgl. Bild 2.6), (d) Dämpfungsverlauf im Sperr- und Durchlaßbereich des Bandpasses mit idealen (durchgezogene Linien) bzw. diskret optimierten (punktirierte Linien) Multipliziererkoeffizienten für $\gamma_{ox} = -0.75$.

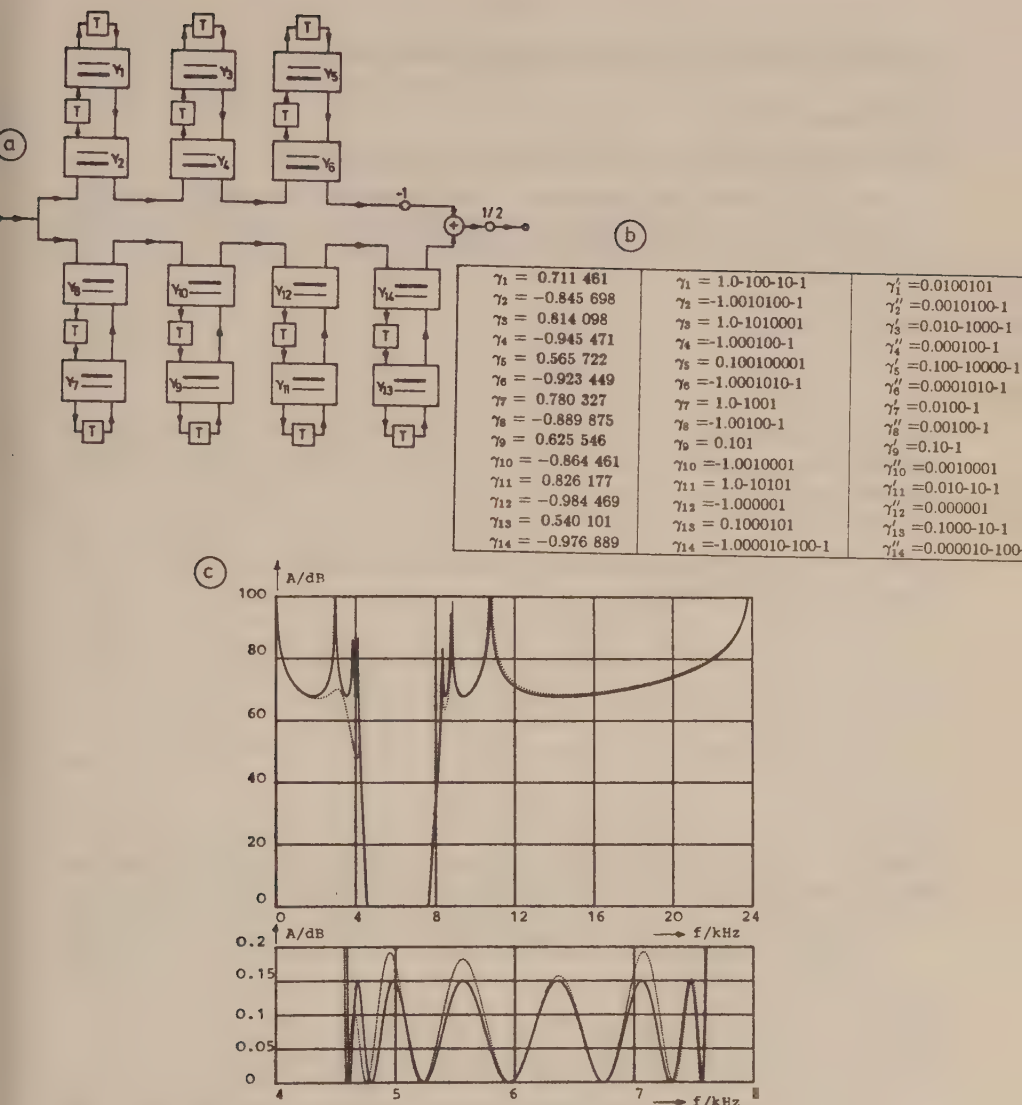


Bild 3.21 (a) Wellenflußdiagramm des Brücken-Wellendigitalfilters, Bandpaß 14.Grades, (b) die idealen und die im CSD-Kode diskret optimierten Werte der Multipliziererkoeffizienten und die Koeffizientenwerte der jeweils günstigsten äquivalenten Zweitor-Paralleladaptoren (vgl. Bild 2.6), (c) Dämpfungsverlauf im Sperr- und Durchlaßbereich mit idealen (durchgezogene Linien) bzw. diskret optimierten (punktuelle Linien) Multipliziererkoeffizienten.

4. Diskrete Optimierung von Multipliziererkoeffizienten

4.1 Problemstellung

4.1.1 Darstellung von Zahlen im Zweierkomplement-Kode

Bekanntlich werden bei Digitalfiltern für die Darstellung der Signale die Festkommagrößen im Zweierkomplement-Kode benutzt. Eine Zahl $X_{n,m}$ wird im Zweierkomplement-Kode mit einer Genauigkeit von 2^m durch $(n - m + 1)$ Binärstellen x_i wie folgt dargestellt [31]:

$$X_{n,m} = -x_n 2^n + \sum_{i=m}^{n-1} x_i 2^i, \quad x_i \in \{0, 1\}, \quad m \leq i \leq n, \quad (4.1)$$

wobei n und m mit $m \leq n$ beliebige ganze Zahlen sind. Damit definieren 2^{n-m+1} Kombinationen von $(n - m + 1)$ Binärstellen x_i eindeutig 2^{n-m+1} unterschiedliche Zahlen $X_{n,m}$ im Bereich

$$-2^n \leq X_{n,m} \leq 2^n - 2^m, \quad (4.2)$$

wobei jede Kombination genau eine Zahl definiert. Das Vorzeichen von $X_{n,m}$ ist durch den Wert von x_n festgelegt, d.h.,

$$0 \leq X_{n,m} \leq 2^n - 2^m \quad \text{für} \quad x_n = 0, \quad (4.3a)$$

$$-2^n \leq X_{n,m} < 0 \quad \text{für} \quad x_n = 1. \quad (4.3b)$$

Die Zahl $X_{n,m} = 0$ ist mit (4.1) eindeutig durch

$$x_n = x_{n-1} = \dots = x_m = 0 \quad (4.4)$$

dargestellt. Für $m = 0$ ist die Zahl $X_{n,m}$ eine ganze Zahl und für $n = 0$ eine gebrochene Zahl im Bereich $-1 \leq X_{n,m} < 1$. Die Wortlänge w der Zahl $X_{n,m}$ wird durch

$$w = n - m + 1 \quad (4.5)$$

definiert.

4.1.2 Darstellung von Zahlen im CSD-Kode

Wenn in Digitalfiltern die Multiplikation eines Signals mit einem konstanten Multipliziererkoeffizienten durch Additionen bzw. Subtraktionen und Verschiebungen (Multiplikation mit den Koeffizientenwerten $2^i, i \in \mathbb{Z}$) ersetzt wird, dann ist die Darstellung der Koeffizienten im CSD-Kode (CSD = canonical signed digit) [31] für den Realisierungsaufwand sehr günstig. Da eine Zahl im CSD-Kode weniger Einsen (NZB, non-zero bits) als im Zweierkomplement-Kode besitzt, werden durch die Benutzung des CSD-Kodes weniger

Additionen bzw. Subtraktionen benötigt, um eine Multiplikation durchzuführen. Eine Zahl $Z_{l,k}$ wird im CSD-Kode wie folgt definiert [31]:

$$Z_{l,k} = \sum_{i=k}^l \xi_i 2^i, \quad \xi_i \in \{0, \pm 1\}, \quad k \leq i \leq l, \quad (4.6)$$

wobei für die vorzeichenbehafteten Binärstellen die folgende Beziehung gilt:

$$\xi_i \xi_{i-1} = 0, \quad k+1 \leq i \leq l. \quad (4.7)$$

Die Zahl $Z_{l,k}$ liegt im Bereich

$$-2^{l+1} + 2^k \leq Z_{l,k} \leq 2^{l+1} - 2^k. \quad (4.8)$$

Damit definieren 3^{l-k+1} Kombinationen von $(l-k+1)$ vorzeichenbehafteten Binärstellen ξ_i ($2^{l-k+2} - 1$) unterschiedliche Zahlen $Z_{l,k}$ im Bereich (4.8). Von den 3^{l-k+1} Kombinationen von $(l-k+1)$ vorzeichenbehafteten Binärstellen ξ_i definieren nur ($2^{l-k+2} - 1$) eindeutig unterschiedliche Zahlen, die unter Berücksichtigung der Beziehung (4.7) im Bereich

$$-2^l[1 + J_{k-l}] \leq Z_{l,k} \leq 2^l[1 + J_{k-l}] \quad (4.9)$$

liegen mit

$$\begin{aligned} J_\nu &= 2^{-2} + 2^{-4} + \dots + 2^{\nu+[1-(-1)^\nu]/2} \\ &= \frac{1}{3}[1 - 2^{\nu+[1-(-1)^\nu]/2}], \quad \nu = -2, -3, -4, \dots, \end{aligned} \quad (4.10)$$

und für diese ist

$$D_{l,k} = \sum_{i=k}^l |\xi_i| \quad (4.11)$$

minimal. Die Eindeutigkeit und die Existenz der Kombinationen von $(l-k+1)$ vorzeichenbehafteten Binärstellen ξ_i mit der Beziehung (4.7) wurde in [31] gezeigt. Hier werden wir nur das Ergebnis der Herleitung der vorzeichenbehafteten Binärstellen ξ_i im CSD-Kode aus den Binärstellen im Zweierkomplement-Kode kurz rekapitulieren.

Die Zahl $Z_{l,k}$ in (4.6) kann mit Hilfe von (4.1) wie folgt geschrieben werden:

$$Z_{l,k} = -z_l 2^l + \sum_{i=k}^{l-1} z_i 2^i = \sum_{i=k}^l \xi_i 2^i, \quad z_i \in \{0, 1\}, \quad \xi_i \in \{0, \pm 1\}, \quad k \leq i \leq l, \quad (4.12)$$

wobei z_i die Binärstellen im Zweierkomplement-Kode sind. Diese Binärstellen definieren die Zahlen im Bereich

$$-2^l \leq Z_{l,k} \leq 2^l - 2^k. \quad (4.13)$$

Wir betrachten nur die Kombinationen von $(l-k+1)$ vorzeichenbehafteten Binärstellen ξ_i , die die Zahlen im Bereich (4.13) definieren. Mit Hilfe der folgenden rekursiven Formeln

können die vorzeichenbehafteten Binärstellen ξ_i aus den Binärstellen z_i hergeleitet werden [31]:

$$\delta_{k-1} = z_{k-1} = \xi_{k-1} = 0 \quad , \quad (4.14a)$$

$$\theta_i = z_i \oplus z_{i-1} \quad , \quad k \leq i \leq l \quad , \quad (4.14b)$$

$$\delta_i = \bar{\delta}_{i-1} \theta_i \quad , \quad k \leq i \leq l \quad , \quad (4.14c)$$

$$\xi_i = (1 - 2z_{i+1})\delta_i \quad , \quad k \leq i \leq l \quad , \quad (4.14d)$$

$$z_{l+1} = z_l \quad , \quad (4.14e)$$

wobei $\oplus$ die Antivalenz (Exklusiv-ODER), d.h.,

$$\begin{aligned} y &= x_1 \neq x_2 \\ &= x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 \quad , \quad x_1, x_2 \in \{0, 1\} \quad , \end{aligned} \quad (4.15)$$

und $\bar{x}$ die Negation, d.h.,

$$\bar{x} + x = 1 \quad , \quad x \in \{0, 1\} \quad , \quad (4.16)$$

bedeutet. Wenn wir (4.14c) mit δ_{i-1} und (4.14d) mit ξ_{i-1} multiplizieren, erhalten wir

$$\delta_i \delta_{i-1} = \delta_{i-1} \bar{\delta}_{i-1} \theta_i = 0 \quad , \quad k \leq i \leq l \quad , \quad (4.17a)$$

$$\xi_i \xi_{i-1} = (1 - 2z_{i+1})(1 - 2z_i) \delta_i \delta_{i-1} = 0 \quad , \quad k \leq i \leq l \quad . \quad (4.17b)$$

Aus (4.17b) erkennen wir die Beziehung (4.7).

4.1.3 Durchführung der Multiplikation

Wir betrachten in Bild 4.1 einen Multiplizierer mit dem Koeffizienten $Z_{l,k}$. Dieser Koeffizient sei im CSD-Kode wie in (4.6) dargestellt und liege im Bereich (4.9). Das Eingangssignal $X_{n,m}$ sei im Zweierkomplement-Kode wie in (4.1) dargestellt und liege im Bereich (4.2). Wir werden zunächst die genaue (exakte) Multiplikation durchführen. Das Ausgangssignal $Y_{a,b}$ kann im Zweierkomplement-Kode wie folgt dargestellt werden:

$$Y_{a,b} = -y_a 2^a + \sum_{i=b}^{a-1} y_i 2^i \quad . \quad (4.18)$$

Da wegen (4.2) und (4.9) das Ergebnis der Multiplikation im Bereich

$$-2^{n+l}[1 + J_{k-l}] \leq X_{n,m} Z_{l,k} \leq 2^{n+l}[1 + J_{k-l}] \quad (4.19)$$

liegt, muß $a = n + l + 1$ und $b = m + k$ sein, um die exakte Multiplikation durchführen zu können. Normalerweise wird die Wortlänge des Ausgangssignals $Y_{a,b}$ nach der Multiplikation auf die Wortlänge des Eingangssignals $X_{n,m}$ reduziert.

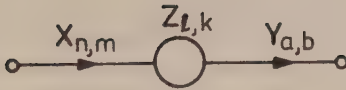


Bild 4.1 Ein Multiplizierer mit dem Koeffizienten $Z_{l,k}$.

Wenn die Multiplikation durch Additionen bzw. Subtraktionen und Verschiebungen ersetzt werden soll, ist es möglich, diese Multiplikation wie folgt durchzuführen:

$$W_k = \xi_k 2^k X_{n,m} \quad , \quad (4.20a)$$

$$W_i = W_{i-1} + \xi_i 2^i X_{n,m} \quad , \quad k+1 \leq i \leq l \quad , \quad (4.20b)$$

$$Y_{a,b} = W_l \quad . \quad (4.20c)$$

Bild 4.2 zeigt die Darstellung der Durchführung einer Multiplikation nach (4.20).

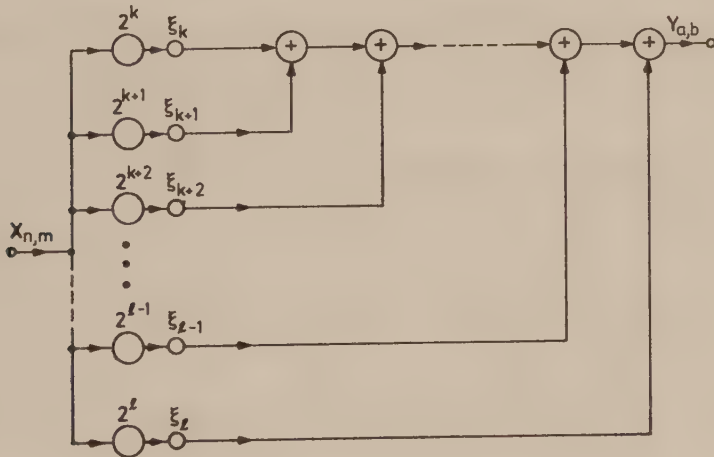


Bild 4.2 Darstellung der Durchführung einer Multiplikation nach (4.20)

Da eine Zahl $Z_{l,k}$ im CSD-Code mit der Beziehung (4.7) maximal B_{l-k+1} mit

$$B_\nu = \frac{\nu}{2} + \frac{[1 - (-1)^\nu]}{4} \quad (4.21)$$

vorzeichenbehaftete von Null verschiedene Binärstellen ξ_i besitzt, werden bei der Multiplikation maximal $(B_{l-k+1} - 1)$ Additionen bzw. Subtraktionen und B_{l-k+1} Verschiebungen benötigt. Falls die Zahl $Z_{l,k}$ q von Null verschiedene Binärstellen besitzt, werden $(q-1)$ Additionen bzw. Subtraktionen und q Verschiebungen benötigt, um die Multiplikation durchzuführen. Die in Bild 4.2 gezeichneten Addierer wurden in [5] als *Implizitaddierer* (*implicit adders*) oder *Koeffizientenaddierer* (*coefficient adders*) bezeichnet.

Wenn die Wortlänge des Ausgangssignals $Y_{a,b}$ auf die Wortlänge des Eingangssignals $X_{n,m}$ reduziert werden soll, müssen zwei Schneideooperationen (Frontschneiden, Endschnneiden) [7] durchgeführt werden. Beim Frontschneiden (*front chopping*) werden die ersten $l+1$ Binärstellen, d.h., $y_{n+l+1}, y_{n+l}, \dots, y_{n+1}$ und beim Endschnneiden (*rear chopping*) die letzten k Binärstellen, d.h., $y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_{m+k}$, von $Y_{a,b}$ abgetrennt. Das Frontschneiden wird gemäß

$$Y_{a,b}^* = Y_{n,b} = -y_n 2^n + \sum_{i=m+k}^{n-1} y_i 2^i \quad (4.22)$$

und das Endschnneiden durch

$$Y_{a,b*} = Y_{a,m} = -y_a 2^a + \sum_{i=m}^{a-1} y_i 2^i \quad (4.23)$$

durchgeführt. Wenn beide Operationen zugleich ausgeführt werden, so erhalten wir

$$Y_{a,b*}^* = Y_{n,m} = -y_n 2^n + \sum_{i=m}^{n-1} y_i 2^i \quad (4.24)$$

Wenn auf das Ergebnis der Multiplikation nur das Endschnneiden (4.23) ausgeführt wird, erhalten wir das Ergebnis mit einer Genauigkeit von 2^m .

Wir wollen nun die einzelnen Additionsschritte (4.20b) genauer betrachten. Wir nehmen an, daß zwei Signalgrößen X'_{n,m_1} und X''_{n,m_2} im Zweierkomplement-Kode mit $m_2 \leq m_1$ gegeben sind. Diese Signalgrößen sollen miteinander addiert bzw. voneinander subtrahiert werden und das Ergebnis soll eine Genauigkeit von 2^{m_1} haben. Eine Möglichkeit ist es, beide Signalgrößen mit der Wortlänge $(n - m_2 + 1)$ zu addieren bzw. zu subtrahieren (exakte Addition bzw. Subtraktion) und danach auf das Ergebnis das Endschnneiden durchzuführen. Dafür braucht man $(n - m_2 + 1)$ Additionen bzw. Subtraktionen von $(n - m_2 + 1)$ Binärstellen. Eine andere Möglichkeit ist, von der Regel 3 in [7] Gebrauch zu machen [32], d.h., wenn $X'_{n,m_1*} = X'_{n,m_1}$, dann gilt

$$(X'_{n,m_1} + X''_{n,m_2})_* = X'_{n,m_1} + X''_{n,m_2*} \quad (4.25)$$

Das bedeutet, daß nach dem Endschnneiden von X''_{n,m_2} nur $(n - m_1 + 1)$ Binärstellen addiert bzw. subtrahiert werden müssen, um die Addition bzw. Subtraktion mit einer Genauigkeit von 2^{m_1} durchzuführen. Dadurch wird die Erhöhung der Wortlänge vermieden und $(m_1 - m_2)$ Additionen bzw. Subtraktionen werden gespart.

Um eine Multiplikation nach (4.20) mit einer Genauigkeit von 2^m durchzuführen, können wir von der oben genannten Regel Gebrauch machen. Um das Ergebnis der Multiplikation mit einer Genauigkeit von 2^m zu erhalten, müssen die Additionsschritte in (4.20b) mit den folgenden Genauigkeiten berechnet werden:

$$2^{i+m} \quad , \quad k+1 \leq i \leq 0 \quad , \quad (4.26a)$$

$$2^m \quad , \quad 1 \leq i \leq l \quad . \quad (4.26b)$$

Aus (4.26a) können wir erkennen, daß bei jedem Additionsschritt die Wortlänge auf $(n - m - i)$ für $k+1 \leq i \leq 0$ erhöht und $(n - m - i)$ Binärstellen addiert bzw. subtrahiert werden müssen, um die Multiplikation mit einer Genauigkeit von 2^m durchzuführen. Das ist ein wesentlicher Nachteil der Multiplikation nach (4.20). Dieser Nachteil kann durch die Benutzung des in [31,32] beschriebenen Verfahrens vermieden werden. Bei diesem Verfahren werden die Additionen bzw. Subtraktionen bei jedem Additionsschritt mit einer Genauigkeit von 2^m durchgeführt, um das Gesamtergebnis mit einer Genauigkeit von 2^m zu erhalten. Mit Hilfe dieses Verfahrens kann die Multiplikation von $Z_{l,k}$ mit $X_{n,m}$ durch

$$W_k = \xi_k X_{n,m} \quad , \quad (4.27a)$$

$$W_i = 2^{-1} W_{i-1} + \xi_i X_{n,m} \quad , \quad k+1 \leq i \leq l \quad , \quad (4.27b)$$

$$Y_{a,b} = 2^l W_l \quad (4.27c)$$

durchgeführt werden [31]. Da bei jedem Additionsschritt (4.27b) das Eingangssignal $X_{n,m}$ mitaddiert bzw. mitsubtrahiert wird, genügt es nach (4.25), jede einzelne Addition bzw. Subtraktion mit einer Genauigkeit von 2^m durchzuführen, um das Gesamtergebnis mit einer Genauigkeit von 2^m zu erhalten. Damit wird die zusätzliche Erhöhung der Wortlänge während der Multiplikation von $(n-m)$ auf $(n-m-i)$ für $k+1 \leq i \leq 0$ vermieden. Das ist ein wesentlicher Vorteil der Durchführung der Multiplikation nach (4.27) gegenüber der nach (4.20).



Bild 4.3 Darstellung der Durchführung einer Multiplikation nach (4.27)

Wegen der Beziehung (4.7) werden hier auch maximal $(B_{l-k+1} - 1)$ Additionen bzw. Subtraktionen benötigt, um die Multiplikation durchzuführen. Wenn einige benachbarte Binärstellen $\xi_i = \xi_{i+1} = 0$ sind, dann kann die Anzahl der Additionsschritte bei der

Multiplikation nach (4.27) reduziert werden. Der Wert des Koeffizienten γ kann durch

$$Z_{l,k} = \sum_{i=1}^q \delta_i 2^{\mu_i} \quad , \quad \delta_i \in \{\pm 1\} \quad , \quad \mu_i \in \mathbb{Z} \quad , \quad (4.28a)$$

dargestellt werden, wobei

$$\mu_i > \mu_{i-1} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, q \quad (4.28b)$$

und q die Anzahl der von Null verschiedenen Binärstellen ist. Wir können $Z_{l,k}$ wie folgt schreiben [32]:

$$Z_{l,k} = 2^{\beta_q} [\delta_q + 2^{\beta_{q-1}} [\delta_{q-1} + 2^{\beta_{q-2}} [\delta_{q-2} + \dots + 2^{\beta_2} [\delta_2 + 2^{\beta_1} \delta_1] \dots]]] \quad . \quad (4.29)$$

$$\beta_q = \mu_q \quad , \quad \beta_i = \mu_i - \mu_{i+1} \quad , \quad 1 \leq i \leq q-1 \quad . \quad (4.29b, c)$$

Wir können nun die Multiplikation des Signals $X_{n,m}$ mit dem Koeffizienten $Z_{l,k}$ wie folgt durchführen [32]:

$$W_1 = \delta_1 X_{n,m} \quad , \quad (4.30a)$$

$$W_i = 2^{\beta_{i-1}} W_{i-1} + \delta_i X_{n,m} \quad , \quad \beta_{i-1} = \mu_{i-1} - \mu_i \quad , \quad 2 \leq i \leq q \quad , \quad (4.30b)$$

$$Y_{a,b} = 2^{\mu_q} W_q \quad . \quad (4.30c)$$

Die Durchführung der Multiplikation nach (4.30) (*verschachtelte Multiplikation, Horner-schema, nested multiplication* [32]) wird in Bild 4.4 dargestellt. Die Anzahl der Addierer in Bild 4.4 ist gleich $(q-1)$ und diese Addierer werden als Implizitaddierer [5] bezeichnet.

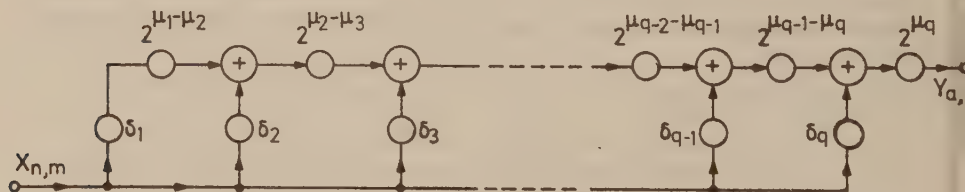


Bild 4.4 Darstellung der Durchführung einer Multiplikation nach (4.30)

4.1.4 Formulierung des diskreten Optimierungsproblems

Bekanntlich bestehen Digitalfilter aus digitalen Bausteinen wie Addierern, Multiplizieren und Verzögerungselementen. Wir nehmen an, daß ein Digitalfilter n Multiplizierkoeffizienten enthält, die diskret optimiert werden sollen.

Definition 4.1

Die n Multiplizierkoeffizienten eines Digitalfilters, die diskret optimiert werden sollen, werden durch den *Koeffizientenvektor*

$$\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T \quad (4.31)$$

im n -dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ dargestellt.

Definition 4.2

Wir bezeichnen als *Stabilitätsintervall* eines Koeffizienten das Intervall, aus dem für jeden Wert die Stabilität des Digitalfilters unter linearen Bedingungen gesichert ist. Der Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}$ liegt im Stabilitätsintervall, falls alle Koeffizienten γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, im Stabilitätsintervall liegen. Wir bezeichnen als

$$M_s = \{ \underline{\gamma} \mid \underline{\gamma} \text{ liegt im Stabilitätsintervall} \} \quad (4.32)$$

die Menge aller Koeffizientenvektoren, die im Stabilitätsintervall liegen.

Bei der diskreten Optimierung sollen die Koeffizientenvektoren betrachtet werden, die im Stabilitätsintervall liegen. Falls die Grenzen des Stabilitätsintervalls nicht bekannt sind, müssen bei der diskreten Optimierung für jeden Koeffizientenvektor die Stabilitätsbedingungen überprüft werden. Das bedeutet eine zusätzliche Rechenzeit. Bei Wellendigitalfiltern können für die Adaptorkoeffizienten die Grenzen des Stabilitätsintervalls angegeben werden [6]. Falls z.B. die Koeffizientenwerte der Zweitoradaptoren in Bild 2.6 in den folgenden Bereichen

$$-1 < \gamma < 1 \quad , \quad 0 < \gamma' < 2 \quad , \quad 0 < \gamma'' < 2 \quad (4.33)$$

liegen, wird die Stabilität des Wellendigitalfilters unter linearen Bedingungen ohnehin gesichert [6]. Das ist eine große Erleichterung für die diskrete Optimierung.

Für die diskrete Optimierung soll zunächst ein geeignetes Gütekriterium zugrunde gelegt werden. Dieses Gütekriterium hängt direkt von den Realisierungsmöglichkeiten der Digitalfilter ab. Da wegen der guten Empfindlichkeitseigenschaften der Wellendigitalfilter die Wortlängen der Multiplizierkoeffizienten kurz sind, ist die Realisierung der Wellendigitalfilter mit Digitalen Signalprozessoren (DSP), die die auf Verschieben und Addieren (shift-and-add) basierenden arithmetischen Einheiten besitzen [32-34], sehr gut geeignet. Je weniger von Null verschiedene Binärstellen ein Koeffizient besitzt, desto weniger Additionsschritte (Zyklen) werden in (4.30) gebraucht, um eine Multiplikation durchzuführen.

Die Multipliziererkoeffizienten γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sind gemäß (4.6), (4.7) und (4.28) im CSD-Kode wie folgt dargestellt:

$$\gamma_i = Z_{l_i, k_i} = \sum_{\nu=k_i}^{l_i} \xi_{i,\nu} 2^\nu = \sum_{\nu=1}^{q_i} \delta_{i,\nu} 2^{\mu_{i,\nu}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.34a)$$

$$\xi_{i,\nu} \in \{0, \pm 1\}, \quad \delta_{i,\nu} \in \{\pm 1\}, \quad (4.34b, c)$$

$$\xi_{i,\nu-1} \xi_{i,\nu} = 0, \quad k_i + 1 \leq \nu \leq l_i, \quad (4.34d)$$

$$\mu_{i,\nu} > \mu_{i,\nu-1}, \quad \mu_{i,\nu} \in Z, \quad 2 \leq \nu \leq q_i. \quad (4.34e, f)$$

Definition 4.3

Falls die Wortlänge $w_i = l_i - k_i + 1$ jedes Koeffizienten γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, endlich ist, wird der Koeffizientenvektor $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ als *diskreter Koeffizientenvektor mit der Wortlänge*

$$w_{max} = \max\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \quad (4.35)$$

bezeichnet.

Definition 4.4

Wir definieren

$$R_i = R_{ai} + R_{si}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.36)$$

als Realisierungsmaß eines Koeffizienten γ_i in (3.34) wobei

$$R_{ai} = -1 + \sum_{\nu=k_i}^{l_i} |\xi_{i,\nu}| = q_i - 1 \quad (4.37)$$

die Anzahl der Implizitaddierer (implicit adders) (Bild 4.4) und R_{si} eine von der in einem Zyklus maximal durchführbaren Verschiebung (Multiplikation des Signals mit $2^{\pm s_{max}}$ in einem Zyklus) des Digitalen Signalprozessors abhängige Größe ist, z.B. sei bei einem Digitalen Signalprozessor (DSP) $s_{max} = 3$. Für die Implementierung der Koeffizienten

$$\gamma_1 = 0.10000101 = 2^{-1}(1 + 2^{-5}(1 + 2^{-2})) \quad (4.38a)$$

$$\gamma_2 = 0.10100101 = 2^{-1}(1 + 2^{-2}(1 + 2^{-3}(1 + 2^{-2}))) \quad (4.38b)$$

werden bei diesem Prozessor die gleiche Anzahl der Zyklen(cycles) benötigt, da bei der Implementierung von γ_1 die Multiplikation des Signals mit einer Verschiebung von 2^{-5} nicht in einem Zyklus durchgeführt werden kann. Für γ_1 ist $R_{a1} = 2$ und $R_{s1} = 1$ und damit $R_1 = 3$, und für γ_2 $R_{a2} = 3$ und $R_{s1} = 0$ und damit $R_2 = 3$. Der Realisierungsaufwand wird für diese beiden Koeffizienten gleich, falls diese Koeffizienten mit dem Digital Signal Prozessor mit $s_{max} = 3$ realisiert werden. Bei dem Digital Signal Prozessor *PROFI* [34] ist $s_{max} = 7$. Bei der Benutzung des diskreten Optimierungsprogramms "DOC", das

wir auf dem Rechner HP 1000 und DOMAIN implementiert haben, kann s_{max} beliebig gewählt werden. Wir können nun R_{si} durch

$$R_{si} = \sum_{\nu=1}^{q_i} a_{i,\nu} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.39)$$

definieren, wobei $a_{i,\nu} \in N_0$ die größte natürliche Zahl mit

$$a_{i,\nu} \leq \frac{\mu_{i,\nu} - \mu_{i,\nu-1}}{s_{max}} \quad , \quad \nu = 2, 3, \dots, q_i + 1 \quad , \quad (4.40a)$$

$$\mu_{q+1} = 0 \quad (4.40b)$$

ist. Da die Definition des Realisierungsmaßes eines Koeffizienten von den zur Zeit aktuellen Realisierungsmöglichkeiten abhängt, kann R_i , $i = 1, 2, \dots, n$, je nach der Realisierungsmöglichkeit geändert werden. Daher ist ein Optimierungsalgorithmus von großer Bedeutung, der möglichst unabhängig von der Definition von R_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ist. Wir werden im weiteren sehen, daß der in dieser Arbeit entwickelte Optimierungsalgorithmus sehr leicht an jede Realisierungsmöglichkeit angepaßt werden kann.

Definition 4.5

Das Realisierungsmaß (Kostenfunktion) eines Koeffizientenvektors $\underline{\gamma}$ wird durch

$$K(\underline{\gamma}) = \sum_{i=1}^n R_i \quad (4.41)$$

definiert.

Bei dem Entwurf der Digitalfilter werden meistens Anforderungen an die Übertragungsfunktion $H(e^{j\omega T})$ im Frequenzbereich gestellt. Diese Anforderungen können sich auf den Betrag und/oder die Phase der Übertragungsfunktion beziehen. Wir werden in dieser Arbeit annehmen, daß die Anforderungen an den Betrag der Übertragungsfunktion bzw. an die Dämpfung in Form eines beliebigen Toleranzschemas im Frequenzbereich gestellt sind. Bild 4.5 zeigt die Dämpfungsanforderungen eines Bandpasses. Die Beziehung zwischen der Dämpfung und dem Betrag der Übertragungsfunktion ist durch

$$A(\omega) = -20 \log |H(e^{j\omega T})| \quad (4.42)$$

gegeben. Da die Übertragungsfunktion von der Frequenz und auch von den Multiplizierkoeffizienten des Digitalfilters abhängt, können wir schreiben $A(\omega) = A(\omega, \underline{\gamma})$. Aus Bild 4.5 sehen wir, daß die Dämpfungsanforderungen bei endlich vielen Frequenzintervallen durch die obere und untere Grenze definiert sind. Jedes Intervall enthält unendlich viele Frequenzpunkte. In der Praxis genügt es, die Dämpfung für eine endliche Zahl von Frequenzpunkten $\omega_\nu (= 2\pi f_\nu)$ für $\nu = 1, 2, \dots, r$ zu betrachten, da der Rechenaufwand bei der

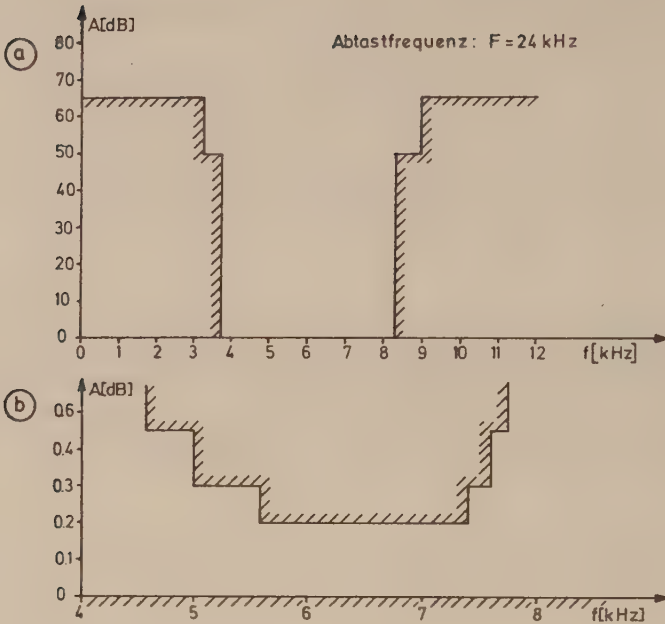


Bild 4.5 Dämpfungsanforderungen eines Bandpasses (a) im Sperrbereich und (b) im Durchlaßbereich.

diskreten Optimierung mit der steigenden Zahl der Frequenzpunkte linear steigt. Daher können die angegebenen Dämpfungsanforderungen durch die folgenden weniger strengen Dämpfungsanforderungen

$$A_{l\nu} \leq A(\omega_\nu, \gamma) \leq A_{u\nu} \quad , \quad \nu = 1, 2, \dots, r \quad , \quad (4.43)$$

ersetzt werden, wobei $A_{l\nu}$ die untere zulässige Grenze und $A_{u\nu}$ die obere zulässige Grenze der Dämpfung bei der Frequenz $\omega_\nu = 2\pi f_\nu$ ist. Falls die gefundene diskrete Lösung nur die weniger strengen Dämpfungsanforderungen (4.43) erfüllt, aber nicht die angegebenen Dämpfungsanforderungen, dann muß entweder die Anzahl der Frequenzpunkte r erhöht oder (4.43) neu definiert werden. Bei den zahlreichen Beispielen für die Brücken-Wellendigitalfilter haben wir festgestellt, daß es genügt, die maximale Anzahl der Frequenzpunkte r auf 25 zu beschränken. Wenn bei der diskreten Optimierung die Dämpfungsanforderung für eine Frequenz verletzt ist, werden die weiteren Frequenzpunkte nicht mehr geprüft.

Daher ist es sinnvoll, zuerst die Frequenzen zu prüfen, die für die Erfüllung der Dämpfungsanforderungen eine große Aussagekraft haben. Solche Frequenzen werden wir als *kritische Frequenzen* bezeichnen. Für ein Tiefpaßfilter erweisen sich z.B. die Durchlaßgrenze f_p und die Sperrgrenze f_s als kritische Frequenz zweckmäßig. Die Wahl dieser kritischen Frequenzen hängt von der eigenen Erfahrung des Benutzers ab. Die Reihenfolge der getesteten Frequenzpunkte ist auch für den Rechenaufwand ein entscheidender Faktor. Da z.B. bei Brücken-Wellendigitalfiltern die Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion gegenüber den Koeffizientenänderungen im Sperrbereich größer als im Durchlaßbereich ist, ist es sinnvoll, zuerst die Frequenzen im Sperrbereich zu testen und wenige Frequenzpunkte im Durchlaßbereich zu prüfen.

Ausgehend von den angegebenen Dämpfungsanforderungen wird zunächst die Struktur des Digitalfilters gewählt und anschließend durch die bekannten Syntheseverfahren der ideale Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}_0 = (\gamma_{01}, \gamma_{02}, \dots, \gamma_{0n})^T$ berechnet. Für Brücken-Wellendigitalfilter kann der ideale (exakte) Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}_0$ mit Hilfe von expliziten Formeln [15] direkt berechnet werden. Unser Ziel in dieser Arbeit ist es, ausgehend von den angegebenen Dämpfungsanforderungen und dem idealen Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}_0$ die diskret optimierten Multipliziererkoefizienten von Brücken-Wellendigitalfiltern mit Zweitoradaptoren zu ermitteln.

Definition 4.6

Wir definieren

$$M_z = \{ \underline{\gamma} \mid A_{l\nu} \leq A(\omega_\nu, \underline{\gamma}) \leq A_{u\nu}, \nu = 1, 2, \dots, r, \text{ und } \underline{\gamma} \in M_s \} \quad (4.44)$$

als die Menge aller *diskreten Koeffizientenvektoren*, die im Stabilitätsintervall liegen und die Dämpfungsanforderungen (4.43) erfüllen.

Wir werden nun das *strenge diskrete Optimierungsproblem* wie folgt formulieren:

Bei der strengen diskreten Optimierung soll als Lösung der Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}^* \in M_z$ gefunden werden, für den das Realisierungsmaß (Kostenfunktion) $K(\underline{\gamma}^*)$ minimal ist, d.h.,

$$K(\underline{\gamma}^*) = \min_{\underline{\gamma} \in M_z} K(\underline{\gamma}) \quad (4.45)$$

Der diskrete Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}^*$ wird als *globales diskretes Optimum* bezeichnet. Falls mehrere Koeffizientenvektoren aus M_z existieren, für die (4.45) gilt, dann haben wir *mehrere globale diskrete Optima*.

Bei der Lösung des strengen diskreten Optimierungsproblems liegt die Hauptschwierigkeit bei der Bestimmung der Elemente der Menge M_z . Um die Elemente von M_z zu bestimmen, sollen viele diskrete Koeffizientenvektoren $\underline{\gamma} \in M_s$ daraufhin geprüft werden, ob sie die Dämpfungsanforderungen erfüllen oder nicht. Da die Anzahl der Elemente von M_s unendlich groß ist, ist es nicht möglich, das globale Optimum mit einem vernünftigen Rechenaufwand zu bestimmen. Daher beschränken wir uns auf die kleineren Intervalle von

Koeffizienten und wir betrachten die diskreten Koeffizientenvektoren, deren Wortlänge maximal auf w beschränkt sind.

Definition 4.7

Wir definieren

$$M_w = \{\underline{\gamma} \mid \text{Wortlänge} \leq w\} \quad (4.46)$$

als die Menge aller diskreten Koeffizientenvektoren, deren Wortlänge maximal auf w beschränkt sind.

Definition 4.8

Wir definieren als *Variationsintervall* eines Koeffizienten γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, das Intervall, aus dem die Werte bei der diskreten Optimierung genommen werden. Wir definieren als

$$M_v = \{\underline{\gamma} \mid \underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T, \gamma_{li} \leq \gamma_i \leq \gamma_{ui}, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.47)$$

die Menge aller Koeffizientenvektoren, deren Koeffizientenwerte in angegebenen Intervallen $\gamma_{li} \leq \gamma_i \leq \gamma_{ui}$, $i = 1, 2, \dots, n$, liegen, wobei γ_{li} die untere Variationsgrenze und γ_{ui} die obere Variationsgrenze der Koeffizienten γ_i ist.

Da die Wellendigitalfilter gute Empfindlichkeitseigenschaften besitzen, reicht es in der Praxis völlig aus, die Koeffizientenvektoren zu betrachten, deren Wortlängen auf 12 Bit beschränkt sind. Die Variationsintervalle der Koeffizienten können durch die Empfindlichkeiten der einzelnen Koeffizienten festgelegt werden.

Definition 4.9

Wir definieren

$$M_{zvw} = \{\underline{\gamma} \mid \underline{\gamma} \in M_z \cap M_v \cap M_w\} \quad (4.48)$$

als die Menge aller Koeffizientenvektoren aus M_z , deren Wortlänge auf w beschränkt sind und deren Koeffizientenwerte in angegebenen Variationsintervallen liegen. Die Koeffizientenvektoren aus M_{zvw} werden als *zulässige Koeffizientenvektoren* bezeichnet.

Wir werden uns in dieser Arbeit mit der Lösung des folgenden *diskreten Optimierungsproblems* befassen:

Bei dem diskreten Optimierungsproblem soll als Lösung der zulässige Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}^* \in M_{zvw}$ gefunden werden, für den das Realisierungsmaß (Kostenfunktion) minimal ist, d.h.,

$$K(\underline{\gamma}^*) = \min_{\underline{\gamma} \in M_{zvw}} K(\underline{\gamma}) \quad (4.49)$$

Der Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}^*$ wird als *diskretes Optimum* bezeichnet. Falls mehrere zulässige diskrete Koeffizientenvektoren aus M_{zvw} existieren, für die (4.49) gilt, dann haben wir mehrere *diskrete Optima*.

4.2 Überblick über Lösungsmethoden des diskreten Optimierungsproblems

Aufgrund des Interesses, Digitalfilter mit minimalem Aufwand zu realisieren, ist in den letzten Jahren für die diskrete Optimierung ein neues Anwendungsgebiet entstanden. Die diskrete Optimierung hat die Aufgabe, den Realisierungsaufwand der Multiplizierkoeffizienten zu minimieren. Für die Lösung der ökonomischen Probleme wurden bereits zahlreiche diskrete Optimierungsverfahren vorgeschlagen, deren Prinzipien für die diskrete Optimierung der Digitalfilter ohne weiteres verwendet werden können. Ein gesamter Überblick über die Lösungsmethoden der diskreten Optimierung wurde in [35] angegeben. Die Lösungsverfahren der diskreten Optimierung werden in drei große Gruppen eingeteilt:

1. Schnittebenenverfahren,
2. Entscheidungsbaumverfahren,
3. Heuristische Verfahren.

Das Schnittebenenverfahren, das auch Gomory-Verfahren genannt wird, wurde hauptsächlich für die Lösung der ganzzahligen linearen Optimierungsaufgaben verwendet. Die Methode *Verzweigung und Beschränkung (branch and bound)* gilt als bedeutendstes Lösungsprinzip von Entscheidungsbaumverfahren. Für die diskrete Optimierung von Digitalfiltern mit der Methode von Verzweigung und Beschränkung existieren mehrere Vorschläge [36-40]. Die Grundidee von der Methode Verzweigung und Beschränkung wollen wir kurz zusammenfassen:

Wir nehmen an, daß die idealen Koeffizientenwerte eines Digitalfilters vorhanden sind. Ein Koeffizient wird in der Nähe seines idealen Wertes quantisiert. Es können mehrere quantisierte Werte von diesem Koeffizienten betrachtet werden. Damit wird der Verzweigungsschritt durchgeführt. Welche von diesen quantisierten Werten weiter in Betracht genommen werden, entscheidet die kontinuierliche Optimierung. Für die quantisierten Werte eines Koeffizienten wird das Filter optimiert, d.h., man versucht für die restlichen Koeffizienten die idealen Werte zu ermitteln, für die der Spielraum am größten ist. Für die kontinuierliche Optimierung kann zum Beispiel das Fletcher-Powell Verfahren benutzt werden. Falls die kontinuierliche Optimierung für einen Zweig keinen Erfolg bringt, d.h., es können keine idealen Werte von den restlichen Koeffizienten gefunden werden, für die die angegebenen Dämpfungsanforderungen erfüllt werden, dann wird dieser Zweig abgebrochen. Damit wird der Beschränkungsschritt durchgeführt. Von den Zweigen wird zunächst derjenige weiter behandelt, an dem der Realisierungsaufwand der bisher optimierten Koeffizienten am geringsten ist und die idealen Werte der restlichen Koeffizienten mit einem gewissen Spielraum für die Dämpfungsanforderungen ermittelt werden können. Dieser Prozeß wird sukzessiv für alle Koeffizienten fortgesetzt, bis alle Koeffizienten diskret optimiert werden. Von den diskret optimierten Koeffizientenvektoren kann ein Koeffizientenvektor mit dem minimalen Realisierungsaufwand als Lösung gewählt werden. Der kritische Teil dieses Verfahrens ist die Bestimmung der Anzahl der Verzweigungen. Durch die Vergrößerung der Verzweigungen wird zwar die Chance vergrößert, das globale Optimum zu finden, aber dadurch wird die Anzahl der kontinuierlichen Optimierungen enorm steigen. Da die kontinuierliche Optimierung mehrmals aufgerufen wird, ist das Verfahren sehr rechenintensiv. Dieses Verfahren wurde in [40] auf Brücken-Wellendigitalfiltern angewendet und die Ergebnisse wurden mit den Ergebnissen verglichen, die von dem im

nächsten Kapitel vorgeschlagenen Algorithmus ermittelt waren. Dieser Vergleich zeigte, daß das Entscheidungsbaumverfahren sehr rechenintensiv ist.

Die Entwicklung der heuristischen Verfahren hat in den letzten Jahren zugenommen. Die heuristischen Verfahren liefern meist weniger günstige Lösungen, aber sie sind schneller als das oben erwähnte Entscheidungsbaumverfahren. Die heuristischen Verfahren werden auch in zwei Gruppen eingeteilt:

1. Stochastische Suchverfahren,
2. Heuristische deterministische Lösungsverfahren.

Die stochastischen Suchverfahren verwenden die Idee des stochastischen Suchens. Ausgehend von einem zulässigen Koeffizientenvektor γ wird ein neuer Koeffizientenvektor γ' durch Hinzufügen eines zufällig erzeugten Differenzenvektors $\Delta\gamma$ gewonnen [43]. Der kritische Teil dieses Verfahrens ist die Erzeugung des zufälligen Differenzenvektors $\Delta\gamma$. Dieses Verfahren ist in der Lage, lokale Minima zu überwinden. Die heuristischen deterministischen Lösungsverfahren haben in der letzten Jahren stark zugenommen. Von dieser Gruppe ist die univariante Suche das grundlegende Verfahren [42]. Dieses Verfahren ist nicht in der Lage, lokale Minima zu überwinden. Eine modifizierte Form von der univarianten Suche wurde ebenfalls in [42] angegeben.

Es existieren zahlreiche Publikationen für die diskrete Optimierung von Digitalfiltern [35-56]. Es ist sehr schwierig, diese Arbeiten eindeutig den oben genannten Lösungsverfahren der diskreten Optimierung zu zuordnen. Manche Verfahren benutzen sogar die Kombinationen von verschiedenen Lösungsverfahren. Es ist sicherlich sehr schwer, die Leistungsfähigkeit der einzelnen Optimierungsverfahren zu diskutieren, da die Vergleiche nur bei der Untersuchung der selben Beispiele erfolgen können. Wir werden unseren Optimierungsalgorithmus an den Beispielen anwenden, die bereits mit anderen Optimierungsalgorithmen getestet sind.

Im folgenden Abschnitt werden wir einen neuartigen diskreten Optimierungsalgorithmus vorstellen. Das besondere Kennzeichen dieses Optimierungsalgorithmus ist es, die Suchstrategie des diskreten Optimums so zu gestalten, daß die Koeffizientenvektoren mit monoton steigendem Realisierungsaufwand geprüft werden. Je einfacher der Realisierungsaufwand der Koeffizienten ist, desto schneller liefert dieser Optimierungsalgorithmus ein diskretes Optimum. Da die Empfindlichkeiten der Multiplizierkoeffizienten bei Wellendigitalfiltern sehr gering sind und damit die Koeffizienten mit geringem Realisierungsaufwand ermittelt werden können, ist dieser Optimierungsalgorithmus insbesondere für Wellendigitalfilter sehr gut geeignet.

4.3 Beschreibung des diskreten Optimierungsalgorithmus

Die Grundidee dieses Optimierungsalgorithmus ist es, die Suchstrategie der zulässigen Koeffizientenvektoren $\underline{\gamma} \in M_{zw}$ so zu gestalten, daß der erste gefundene zulässige Koeffizientenvektor das diskrete Optimum ist. Damit braucht man nicht alle Elemente der Menge M_{zw} zu prüfen und dadurch wird der Rechenaufwand enorm reduziert. Ein weiteres Kennzeichen unseres Verfahrens ist *die systematische Suche des diskreten Optimums*. Durch die systematische Suche wird die Berechnung der Übertragungsfunktion erheblich vereinfacht.

Vor dem Beginn der diskreten Optimierung werden die Koeffizientenwerte, die im Stabilitäts- und angegebenen Variationsintervall liegen und deren Wortlänge maximal auf w beschränkt sind, mit dem monoton steigenden Realisierungsmaß in die Tabellen (look-up tables) [57,58] eingeordnet.

Definition 4.10

Wir definieren

$$T_{w,j} = \{ \gamma_i \mid \gamma_{li} \leq \gamma_i \leq \gamma_{ui}, \quad R_i = j, \quad w_i \leq w \quad \text{und} \quad \gamma_i \text{ im Stabilitätsintervall} \},$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.50)$$

als die Menge aller Koeffizienten, deren Werte im Stabilitäts- und angegebenen Variationsintervall $[\gamma_{li}, \gamma_{ui}]$ liegen und deren Wortlänge maximal auf w beschränkt sind und deren Realisierungsmaße $R_i = j$ sind. Die Indizes i und j können hierbei alle Werte $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 0, 1, 2, \dots, m_i$ annehmen, wobei m_i das mit der Wortlänge w_i erhaltene maximale Realisierungsmaß und n die Anzahl der Multipliziererkoeffizienten ist. Wir werden $T_{w,j}$, $j = 0, 1, 2, \dots, m_i$ als j te Tabelle (look-up table) bezeichnen.

Wir wollen nun an Hand eines Beispiels zeigen, wie die Tabellen $T_{w,j}$, $j = 0, 1, \dots, m_i$, ausgefüllt werden. Wir nehmen an, daß die Adaptorkoeffizienten eines Brücken-Wellendigitalfilters mit den in Bild 2.6 angegebenen Zweitor-Paralleladaptoren diskret optimiert werden sollen. Dieses Brücken-Wellendigitalfilter werde in einem Digitalen Signalprozessor implementiert, der die auf Verschieben und Addieren (shift-and-add) basierende arithmetische Einheit besitzt und die maximal durchführbare Verschiebung des Signals in einem Zyklus (Multiplikation des Signals mit $2^{\pm s_{max}}$ in einem Zyklus) durch $s_{max} = 3$ gegeben ist. Wir betrachten einen Adaptorkoeffizienten γ_i , dessen Variationsintervall für die diskrete Optimierung durch $\gamma_{li} = -0.5$ und $\gamma_{ui} = 0.5$ gegeben ist. Die maximale Wortlänge w der Koeffizientenwerte, die bei der diskreten Optimierung betrachtet werden, sei auf 6 Bit beschränkt. Da das Stabilitätsintervall des Koeffizienten γ_i wegen (4.33a) $(-1, +1)$ ist, erfüllen alle Koeffizientenwerte aus dem angegebenen Variationsintervall die Stabilitätsbedingungen. Nun werden alle Koeffizientenwerte aus dem Variationsintervall mit der maximalen Wortlänge 6 Bit mit monoton steigendem Realisierungsmaß R_i in (4.36) mit (4.37) und (4.39) in die Tabellen $T_{w,j}$, $j = 0, 1, \dots, m_i$ eingeordnet. Wir fangen mit den Koeffizientenwerten an, für die $R_i = 0$ ist. Wegen (4.36) gilt $R_{ai} = 0$ und

$R_{si} = 0$, d.h., diese Koeffizienten benötigen keinen Implizitaddierer. Diese Koeffizientenwerte werden mit monoton steigender Größe in die Tabelle $T_{w,0}$ mit $w = 6$ eingetragen. Die Elemente von $T_{6,0}$ werden in der Tabelle 4.1 im CSD-Kode dargestellt.

TABELLE 4.1
Elemente von $T_{6,0}$ im CSD-Kode

0.-1 0 0 0 0	0. 0 0 1 0 0
0. 0-1 0 0 0	0. 0 1 0 0 0
0. 0 0-1 0 0	0. 1 0 0 0 0
0. 0 0 0 0 0	

Falls die Null im Variationsintervall eines Koeffizienten liegt, werden wir die Null in die Tabelle $T_{w,0}$ einordnen. Eine weitere Vereinfachung tritt auf, falls eine Lösung für den Koeffizienten eines Zweitoradaptors mit $\gamma_i = 0$ gefunden wird. In diesem Fall wird der Zweitoradaptor entfallen und dadurch werden weitere drei Addierer gespart. Wir werden bei den Beispielen sehen, daß solche Fälle auftreten können. Da wegen $s_{max} = 3$ für die Koeffizientenwerte 0.000-10, 0.00010, 0.0000-1 und 0.00001 $R_{si} = 1$ und damit $R_i = 1$ wird, werden diese Koeffizientenwerte in die nächste Tabelle $T_{6,1}$ eingetragen. Nun werden die weiteren Koeffizientenwerte, für die $R_i = 1$ ist, in die Tabelle $T_{6,1}$ mit monoton steigender Größe eingetragen. Das Realisierungsmaß $R_i = 1$ bedeutet, daß entweder $R_{ai} = 1$ und $R_{si} = 0$ oder $R_{ai} = 0$ und $R_{si} = 1$ sind. Die Elemente von $T_{6,1}$ werden in der Tabelle 4.2 angegeben.

TABELLE 4.2
Elemente von $T_{6,1}$ im CSD-Kode

0.-1 0 0 1 0	0. 0 0 0 0 1
0.-1 0 1 0 0	0. 0 0 0 1 0
0. 0-1 0-1 0	0. 0 0 1 0-1
0. 0-1 0 0-1	0. 0 0 1 0 1
0. 0-1 0 0 1	0. 0 1 0-1 0
0. 0-1 0 1 0	0. 0 1 0 0-1
0. 0 0-1 0-1	0. 0 1 0 0 1
0. 0 0-1 0 1	0. 0 1 0 1 0
0. 0 0 0-1 0	0. 1 0-1 0 0
0. 0 0 0 0-1	0. 1 0 0-1 0

Da wegen $s_{max} = 3$ für die Koeffizientenwerte 0.1000-1 und 0.-10001 $R_{si} = 1$ und $R_{ai} = 1$ und damit $R_i = 2$ ist, werden diese Koeffizientenwerte in die nächste Tabelle $T_{6,2}$ eingetragen. Nun werden die weiteren Koeffizientenwerte, für die $R_i = 2$ ist, in die Tabelle $T_{6,2}$ mit monoton steigender Größe eingetragen. Für $R_i = 2$ existieren drei Möglichkeiten:

- a) $R_{ai} = 2$, $R_{gi} = 0$ $\iff R_i = 2$,
 b) $R_{ai} = 0$, $R_{gi} = 2$ $\iff R_i = 2$,
 c) $R_{ai} = 1$, $R_{gi} = 1$ $\iff R_i = 2$.

Da die Wortlänge des Koeffizienten γ_i auf 6 Bit beschränkt ist, existieren keine Werte für Fall b. Die Elemente von $T_{6,2}$ werden in der Tabelle 4.3 angegeben.

TABELLE 4.3
 Elemente von $T_{6,2}$ im CSD-Code

0-1 0 0 0 1	0. 1 0-1 0-1
0-1 0 1 0-1	0. 1 0-1 0 1
0-1 0 1 0 1	0. 1 0 0 0-1

Für $R_i = 3$ existieren keine Koeffizienten mit 6 Bit Wortlänge und damit ist die Größe m_i in der Definition 4.9 gleich 2. Für jeden Koeffizienten γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, werden diese Tabellen $T_{w,j}$, $j = 0, 1, 2, \dots, m_i$ vor der diskreten Optimierung vorbereitet. Ein wesentlicher Vorteil dieser Tabelle ist die Flexibilität des Optimierungsalgorithmus. Durch Änderung des Realisierungsmaßes in (3.36) (d.h., durch Änderung der Koeffizientenwerte in den Tabellen) kann die diskrete Optimierung für andere Gütekriterien angewendet werden [59]. Ein weiterer Vorteil der Vorbereitung der Tabellen vor der diskreten Optimierung ist es, daß man während der diskreten Optimierung keine zusätzliche Rechenzeit für die Bestimmung der Koeffizientenvektoren braucht. Wir werden nun zeigen wie man während der diskreten Optimierung die Koeffizientenvektoren aus den Tabellen bestimmt.

Wir wollen nun die Schnittmenge $M_s \cap M_w \cap M_v$ in verschiedene Teilmengen M_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, zerlegen, die nach dem Realisierungsmaß der einzelnen Koeffizientenvektoren definiert sind.

Definition 4.11

Wir definieren

$$M_j = \{ \underline{\gamma} \mid \underline{\gamma} \in M_s \cap M_w \cap M_v \text{ und } K(\underline{\gamma}) = j \} , \quad j = 0, 1, 2, \dots , \quad (4.51)$$

als die Menge aller Koeffizientenvektoren aus der Schnittmenge $M_s \cap M_w \cap M_v$, deren Realisierungsmaß $K(\underline{\gamma})$ (vgl. (4.41)) gleich j ist.

Die Elemente von M_0 sind die Koeffizientenvektoren, für die $K(\underline{\gamma}) = 0$ ist. In diesem Fall sollen alle Koeffizientenwerte aus der Tabelle $T_{w,0}$ entnommen und kombiniert werden. Die Elemente von M_1 sind die Koeffizientenvektoren, für die $K(\underline{\gamma}) = 1$ ist. In diesem Fall wird jeweils ein Koeffizient aus der Tabelle $T_{w,1}$ und die restlichen Koeffizienten werden aus der Tabelle $T_{w,0}$ entnommen und kombiniert usw. Tabelle 4.4 zeigt ein

Beispiel für die Zuordnung von Tabellen $T_{w,j}$ zu den Mengen M_j , $j = 0, 1, 2, 3$ für $n = 3$.

TABELLE 4.4
Zuordnung der Tabellen $T_{\delta,j}$ zu den Mengen M_j , $j = 0, 1, 2, 3$, für $n = 3$.

γ_1	γ_2	γ_3	
$T_{6,0}$	$T_{6,0}$	$T_{6,0}$	M_0
$T_{6,0}$	$T_{6,0}$	$T_{6,1}$	M_1
$T_{6,0}$	$T_{6,1}$	$T_{6,0}$	
$T_{6,1}$	$T_{6,0}$	$T_{6,0}$	
$T_{6,0}$	$T_{6,0}$	$T_{6,2}$	M_2
$T_{6,0}$	$T_{6,1}$	$T_{6,1}$	
$T_{6,0}$	$T_{6,2}$	$T_{6,0}$	
$T_{6,1}$	$T_{6,0}$	$T_{6,1}$	
$T_{6,1}$	$T_{6,1}$	$T_{6,0}$	
$T_{6,2}$	$T_{6,0}$	$T_{6,0}$	
$T_{6,0}$	$T_{6,0}$	$T_{6,3}$	M_3
$T_{6,0}$	$T_{6,1}$	$T_{6,2}$	
$T_{6,0}$	$T_{6,2}$	$T_{6,1}$	
$T_{6,0}$	$T_{6,3}$	$T_{6,0}$	
$T_{6,1}$	$T_{6,0}$	$T_{6,2}$	
$T_{6,1}$	$T_{6,1}$	$T_{6,1}$	
$T_{6,1}$	$T_{6,2}$	$T_{6,0}$	
$T_{6,2}$	$T_{6,0}$	$T_{6,1}$	
$T_{6,2}$	$T_{6,1}$	$T_{6,0}$	
$T_{6,3}$	$T_{6,0}$	$T_{6,0}$	

Ein Koeffizientenvektor $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ ist ein Element von M_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, falls gilt

$$\gamma_i \in T_{w,\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = j, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{N}_0. \quad (4.52a, b)$$

Die Elemente der Menge M_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, werden durch die Kombinationen aller Koeffizientenwerte aus den zugehörigen Tabellen gebildet. Diese Kombinationen werden systematisch gebildet, d.h., bei jedem Kombinationsschritt wird nur eine geringe Anzahl der Koeffizienten ihre Werte ändern. Daher bezeichnen wir die Suche des diskreten Optimums als *systematische Suche des diskreten Optimums*. Wir wollen die Bestimmung der Elemente von M_0 mit einem Beispiel erläutern. Die Variationsbereiche der drei Koeffizienten seien so gewählt, daß die Tabellen $T_{w,0}$ für $i = 1, 2, 3$ wie folgt ausgefüllt sind:

$$T_{6,0} = \{\gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}\}, \quad T_{6,0} = \{\gamma_2^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \gamma_2^{(3)}\}, \quad T_{6,0} = \{\gamma_3^{(1)}, \gamma_3^{(2)}, \gamma_3^{(3)}, \gamma_3^{(4)}\}.$$

Die Elemente von M_0 werden durch die Kombination aller Koeffizientenwerte aus den Tabellen $T_{w,0}$ gebildet. Tabelle 4.5 zeigt die Elemente der Menge M_0 .

Bei der diskreten Optimierung werden zunächst die Elemente von M_0 geprüft. Wenn ein zulässiger Koeffizientenvektor aus M_0 gefunden wird, ist dieser Koeffizientenvektor das diskrete Optimum. Wenn alle Elemente von M_0 geprüft werden und kein zulässiger Koeffizientenvektor gefunden wird, dann werden die Elemente von M_1 geprüft, so werden mit steigendem Realisierungsmaß die Koeffizientenvektoren aus M_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, geprüft. Da mit steigendem Realisierungsmaß alle Koeffizientenvektoren aus M_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, geprüft werden, wird die erste gefundene Lösung das diskrete Optimum sein.

Bei unserem Optimierungsalgorithmus haben wir dem Benutzer eine Möglichkeit gegeben, seine eigene Strategie zu entwickeln. Z.B. kann man den Startpunkt beliebig wählen, d.h., man braucht nicht mit den Elementen von M_0 anzufangen, sondern von einer beliebigen Menge M_ν , $\nu \geq 0$ mit $\nu \in \mathbb{N}_0$. In diesem Fall werden die Elemente von M_ν zuerst geprüft. Wenn keine Lösung aus dieser Menge gefunden wird, dann werden die Elemente von $M_{\nu+1}$ geprüft usw. Damit kann man den Rechenaufwand reduzieren, der für die Prüfung der Elemente von M_0 bis $M_{\nu-1}$ gebraucht wird. Man kann in diesem Fall natürlich nicht sicher sein, daß die erste gefundene Lösung das diskrete Optimum ist.

Eine weitere Suchstrategie ist, die Anfangsmenge M_ν , $\nu > 0$ mit $\nu \in \mathbb{N}_0$ beliebig zu wählen und dann ν zu verkleinern, d.h., wir prüfen zunächst die Elemente von M_ν , falls eine Lösung aus M_ν gefunden wird, werden die nächsten Lösungen aus M_ν weiter gesucht. Falls alle Elemente von M_ν geprüft sind, wird die Lösung in der Menge $M_{\nu-1}$ gesucht usw. Der Benutzer kann auch nach jeder gefundenen Lösung die nächste Menge beliebig wählen. Diese Möglichkeit ist daher gegeben, daß es möglich ist, daß in einer Menge mehrere zulässige Koeffizientenvektoren vorhanden sind. In diesem Fall kann der Benutzer sofort aus dieser Menge aussteigen und in eine andere Menge übergehen, die die Koeffizientenvektoren mit dem kleineren Realisierungsmaß enthalten.

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß die systematische Suche bei der Berechnung der Übertragungsfunktion viele Vereinfachungen ermöglicht. Da bei der systematischen Suche in jedem Kombinationsschritt die Werte von wenigen Koeffizienten geändert werden, wird die Berechnung der Übertragungsfunktion so gestaltet, daß man bei jedem Schritt nur wenige Operationen braucht, um die Übertragungsfunktion zu bestimmen. Das diskrete Optimierungsprogramm "DOC", das unter Benutzung dieses diskreten Optimierungsalgorithmus entwickelt wurde, wurde in den Rechnern HP 1000 und DOMAIN implementiert.

TABELLE 4.5
Kombinationen der Koeffizientenwerte für M_0 .

$T_{6,0}$	$T_{6,0}$	$T_{6,0}$	M_0
$\gamma_1^{(1)}$	$\gamma_2^{(1)}$	$\gamma_3^{(1)}$	$\underline{\gamma}^{(1)}$
"	"	$\gamma_3^{(2)}$	$\underline{\gamma}^{(2)}$
"	"	$\gamma_3^{(3)}$	$\underline{\gamma}^{(3)}$
"	"	$\gamma_3^{(4)}$	$\underline{\gamma}^{(4)}$
$\gamma_1^{(1)}$	$\gamma_2^{(2)}$	$\gamma_3^{(1)}$	$\underline{\gamma}^{(5)}$
"	"	$\gamma_3^{(2)}$	$\underline{\gamma}^{(6)}$
"	"	$\gamma_3^{(3)}$	$\underline{\gamma}^{(7)}$
"	"	$\gamma_3^{(4)}$	$\underline{\gamma}^{(8)}$
$\gamma_1^{(1)}$	$\gamma_2^{(3)}$	$\gamma_3^{(1)}$	$\underline{\gamma}^{(9)}$
"	"	$\gamma_3^{(2)}$	$\underline{\gamma}^{(10)}$
"	"	$\gamma_3^{(3)}$	$\underline{\gamma}^{(11)}$
"	"	$\gamma_3^{(4)}$	$\underline{\gamma}^{(12)}$
$\gamma_1^{(2)}$	$\gamma_2^{(1)}$	$\gamma_3^{(1)}$	$\underline{\gamma}^{(13)}$
"	"	$\gamma_3^{(2)}$	$\underline{\gamma}^{(14)}$
"	"	$\gamma_3^{(3)}$	$\underline{\gamma}^{(15)}$
"	"	$\gamma_3^{(4)}$	$\underline{\gamma}^{(16)}$
$\gamma_1^{(2)}$	$\gamma_2^{(2)}$	$\gamma_3^{(1)}$	$\underline{\gamma}^{(17)}$
"	"	$\gamma_3^{(2)}$	$\underline{\gamma}^{(18)}$
"	"	$\gamma_3^{(3)}$	$\underline{\gamma}^{(19)}$
"	"	$\gamma_3^{(4)}$	$\underline{\gamma}^{(20)}$
$\gamma_1^{(2)}$	$\gamma_2^{(3)}$	$\gamma_3^{(1)}$	$\underline{\gamma}^{(21)}$
"	"	$\gamma_3^{(2)}$	$\underline{\gamma}^{(22)}$
"	"	$\gamma_3^{(3)}$	$\underline{\gamma}^{(23)}$
"	"	$\gamma_3^{(4)}$	$\underline{\gamma}^{(24)}$

4.4 Berechnung der charakteristischen Funktion von Brücken-Wellendigitalfiltern mit Zweitoradaptoren

Bei der diskreten Optimierung sollen die Dämpfungsanforderungen für die Koeffizientenvektoren $\underline{\gamma} \in M_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, geprüft werden. Die Dämpfung A_{21} (oder A_{11}) in (2.14) kann mit Hilfe der Transmittanz S_{21} (oder Reflektanz S_{11}) berechnet werden. Man kann die Dämpfung auch mit Hilfe der charakteristischen Funktion $C(\psi)$ gemäß (2.14) berechnen. Da die Berechnung der charakteristischen Funktion bei Brücken-Wellendigitalfiltern einfacher ist als die Berechnung von Transmittanz oder Reflektanz, werden wir hier nur die Berechnung der charakteristischen Funktion betrachten. Da wir möglichst viele Koeffizientenvektoren $\underline{\gamma}$ aus M_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, prüfen wollen, interessieren wir uns für eine effektive Berechnung der charakteristischen Funktion. Wir werden gemäß (2.14) alle Dämpfungsanforderungen auf die Anforderungen des Betrages der charakteristischen Funktion zurückführen. Unser Ziel ist es, den Betrag der charakteristischen Funktion möglichst effektiv zu berechnen. Wir betrachten ein Brücken-Wellendigitalfilter, dessen Wellenflußdiagramm in Bild 2.8 und dessen Referenzschaltung in Bild 2.7 gegeben ist. Die charakteristische Funktion $C(\psi)$ dieses symmetrischen Zweitors in der Abhängigkeit von Z_1 und Z_2 ist in (2.15) gegeben, wobei Z_1 und Z_2 die kanonischen Impedanzen sind. Wenn Z_1 und Z_2 Reaktanzen sind, können wir schreiben

$$Z_1 = jX_1 \quad \text{und} \quad Z_2 = jX_2, \quad (4.53a, b)$$

wobei X_1 und X_2 reelle Größen sind. Wenn wir (4.54) in (2.15) einsetzen, erhalten wir für den Betrag der charakteristischen Funktion den folgenden Ausdruck:

$$|C(j\varphi)| = \left| \frac{X_1 X_2 + R^2}{(X_2 - X_1)R} \right| = \left| \frac{x_1 x_2 + 1}{x_2 - x_1} \right| \quad (4.54)$$

mit

$$x_1 = \frac{X_1}{R}, \quad x_2 = \frac{X_2}{R}. \quad (4.55a, b)$$

Da x_1 und x_2 reelle Größen sind, werden wir für die Berechnung des Betrages der charakteristischen Funktion nur die Operationen von reellen Größen brauchen. Das ist eine große Ersparnis von Rechenzeit.

Wir betrachten ein Brücken-Wellendigitalfilter, dessen Zweige aus verschiedenen Sektionen (Bild 4.6a) bestehen, wobei jede Sektion aus dem Wellenflußdiagramm mit Zweitoradaptoren (Bild 4.6b) aufgebaut ist. Wenn wir das Wellenflußdiagramm der Kettenschaltung von Leitungselementen betrachten, haben wir eine Sektion in einem Zweig. Wenn wir das Wellenflußdiagramm der Kaskadierung von Allpaßgliedern betrachten, haben wir verschiedene Sektionen in einem Zweig. Man kann das Wellenflußdiagramm beliebig verallgemeinern. Unser Ziel ist es, durch eine gewisse Beschränkung der betrachteten Strukturen die Übertragungsfunktion möglichst effektiv zu berechnen.

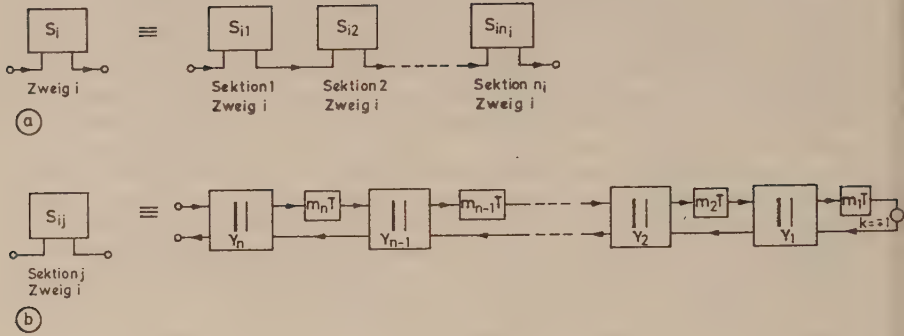


Bild 4.6 a) Zweig i besteht aus n_i Sektionen, $i = 1, 2$. b) Wellenflußdiagramm einer Sektion, wobei $m_\nu \in \mathbb{N}$ für $\nu = 1, 2, \dots, n$ ist.

Unser Ziel ist es, bei gegebenem Wellenflußdiagramm in Bild 4.6 die Zweigimpedanzen Z_i bzw. X_i für $i = 1, 2$ möglichst effektiv zu berechnen. Die Impedanzen Z_{ij} bzw. X_{ij} der Sektionen in Referenzschaltung können mit Hilfe von (2.18)-(2.23) wie folgt berechnet werden:

$$z'_\nu = r_\nu \frac{z'_{\nu-1} + \psi_{m_\nu}}{1 + \psi_{m_\nu} z'_{\nu-1}}, \quad x'_\nu = r_\nu \frac{x'_{\nu-1} + \varphi_{m_\nu}}{1 - \varphi_{m_\nu} x'_{\nu-1}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (4.56a, b)$$

$$z'_0 = \begin{cases} \infty & \text{für } k = 1, \\ 0 & \text{für } k = -1, \end{cases}, \quad x'_0 = \begin{cases} \infty & \text{für } k = 1, \\ 0 & \text{für } k = -1, \end{cases}, \quad (4.56c, d)$$

$$\psi_{m_\nu} = \tanh(m_\nu \frac{pT}{2}), \quad \varphi_{m_\nu} = \tan(m_\nu \frac{\omega T}{2}), \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (4.56e, f)$$

$$r_\nu = \frac{1 - \gamma_\nu}{1 + \gamma_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (4.56g)$$

$$Z_{ij} = Z'_n = z'_n R, \quad X_{ij} = X'_n = x'_n R. \quad (4.56h, i)$$

Für die Bestimmung der charakteristischen Funktion ist es günstig, mit den normierten Größen zu rechnen. Eine weitere Vereinfachung ist dann gegeben, wenn wir vor der diskreten Optimierung alle Koeffizientenwerte γ_ν in den Tabellen (look-up tables) auf die Größe r_ν gemäß (4.56g) umrechnen. Die rekursive Formel (4.56b) läßt sich im Rechner sehr einfach implementieren. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, falls nur der Wert eines Koeffizienten γ_μ , $\mu \in \mathbb{N}$ in einer Sektion geändert wird. In diesem Fall wird

die rekursive Formel in (4.56b) ab $\nu = \mu$ berechnet, wenn der Wert von $x'_{\mu-1}$ vorher gespeichert ist. Damit wird der Rechenaufwand erheblich reduziert.

Die Kettenschaltung der Allpaßsektionen in Bild 4.6a ist in der Referenzschaltung durch die Kaskadenschaltung von Dreitor-Zirkulatoren mit gleichen Torwiderständen R nachgebildet, wobei ein Tor jedes Dreitor-Zirkulators durch die Reaktanzen abgeschlossen ist. Das dritte Tor des letzten Dreitor-Zirkulators ist im Leerlauf. Wir können nun mit Hilfe von (2.30) die folgenden rekursiven Formeln für die Berechnung der Zweigimpedanzen Z_i bzw. X_i für $i = 1, 2$, angeben:

$$z''_{ij} = \frac{z''_{i(j-1)} z_{ij} + 1}{z''_{i(j-1)} + z_{ij}}, \quad x''_{ij} = \frac{x''_{i(j-1)} x_{ij} - 1}{x''_{i(j-1)} + x_{ij}}, \quad j = 1, 2, \dots, n_i, \quad (4.57a, b)$$

$$z''_{i0} = \infty, \quad x''_{i0} = \infty, \quad (4.57c, d)$$

$$z_i = z''_{in_i}, \quad x_i = x''_{in_i}, \quad (4.57e, f)$$

$$Z_i = z''_{in_i} R, \quad X_i = x''_{in_i} R. \quad (4.57g, h)$$

Da bei der systematischen Suche die Werte von wenigen Koeffizienten geändert werden, wird die Berechnung der Zweigimpedanzen erheblich vereinfacht. Wir nehmen an, daß der Wert eines Koeffizienten im Zweig 2 und in der Sektion μ geändert wird. In diesem Fall braucht man nicht die Zweigimpedanz Z_1 neu zu berechnen. Im Zweig 2 wird nur die Reaktanz $X_{2\mu}$ neu berechnet. Da alle restlichen Reaktanzen im Zweig 2 konstant geblieben sind, braucht man die rekursive Formel (4.57b) nur für $j = \mu, \mu + 1, \dots, n_2$ zu berechnen. Natürlich werden alle Reaktanzwerte für jede Frequenz für einen Kombinations-schritt gespeichert. Durch diese Art der Berechnung der charakteristischen Funktion wird der Rechenaufwand erheblich reduziert.

4.5 Berechnung der Empfindlichkeit der charakteristischen Funktion von Brücken-Wellendigitalfiltern

Bei der Optimierung von Netzwerken wird die Berechnung der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion bezüglich der Entwurfsparameter benötigt. Es existieren verschiedene Lösungsvorschläge für die Berechnung der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion bei elektrischen Netzwerken. Eine Methode ist die direkte Berechnung der partiellen Ableitung der Übertragungsfunktion. Diese Methode läßt sich nicht für jede beliebige Struktur einfach anwenden, da für jede Struktur der Zusammenhang zwischen der Übertragungsfunktion und den Entwurfsparametern hergeleitet werden muß. Die zweite Methode ist die "adjungiertes Netzwerk" Methode [79-80], die auf dem Tellegenschen Theorem [78] beruht und für beliebige lineare Netzwerke anwendbar ist. Eine weitere Methode [81-86] beruht auf der Anwendung des bilinearen Theorems und kann auch für beliebige lineare Netzwerke angewendet werden.

Eine allgemeine Berechnungsmethode für die Bestimmung der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion eines Signalflußnetzwerkes gegenüber den Änderungen von Zweigelementen dieses Netzwerkes wurde in [70] angegeben. Bei dieser Methode soll einmal das originale Signalflußnetzwerk und einmal das transponierte Signalflußnetzwerk analysiert werden, um die Empfindlichkeiten der Übertragungsfunktion gegenüber den Änderungen aller Zweigelemente zu berechnen. Die Anwendung dieser Methode für Wellendigitalfilter wurde in [87] angegeben.

Wir wollen nun die Empfindlichkeit der charakteristischen Funktion gegenüber der Änderungen der Koeffizienten mit Hilfe von der Methode bestimmen, die auf der Anwendung des bilinearen Theorems beruht [81-86].

Wir können die charakteristische Funktion eines Brücken-Wellendigitalfilters gemäß (2.15) für $\psi = j\varphi$ wie folgt schreiben:

$$C(j\varphi) = j \frac{x_1 x_2 - 1}{x_2 - x_1} = jK(\varphi) \quad , \quad (4.58a)$$

wobei

$$x_i = \frac{X_i}{R} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (4.58b)$$

die normierten kanonischen Impedanzen sind. Die reelle Größe $K(\varphi)$ ist von der Frequenz und den Koeffizienten abhängig. Wegen der Linearität der untersuchten Strukturen und der Tatsache, daß γ_ν nur in einer der beiden Reaktanzen x_1 und x_2 auftritt, können wir unter der Annahme, daß $K(\varphi, \gamma_\nu) \neq \infty$ für $\gamma_\nu = \infty$ ist, schreiben

$$K(\varphi) = K(\varphi, \gamma_\nu) = c_\nu \frac{b_\nu + \gamma_\nu}{a_\nu + \gamma_\nu} \quad , \quad \forall \nu \quad , \quad (4.59)$$

wobei γ_ν einer von den Koeffizienten γ_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$ ist. Die reellen Größen a_ν , b_ν und c_ν können wie folgt bestimmt werden:

$$c_\nu = K_\infty \quad , \quad a_\nu = \gamma_\nu \frac{K_\infty - K(\varphi, \gamma_\nu)}{K(\varphi, \gamma_\nu) - K_0} \quad , \quad b_\nu = \frac{K_0}{K_\infty} a_\nu \quad , \quad (4.60a, b, c)$$

mit

$$K_\infty = K(\varphi, \gamma_\nu)|_{\gamma_\nu \rightarrow \infty} \quad , \quad K_0 = K(\varphi, \gamma_\nu)|_{\gamma_\nu = 0} \quad . \quad (4.60d, e)$$

Die Ableitung von $C(\varphi, \gamma_\nu)$ nach γ_ν wird durch

$$\frac{\partial C(\varphi, \gamma_\nu)}{\partial \gamma_\nu} = j \frac{\partial K(\varphi, \gamma_\nu)}{\partial \gamma_\nu} \quad (4.61a)$$

mit

$$\frac{\partial K(\varphi, \gamma_\nu)}{\partial \gamma_\nu} = \frac{(K(\varphi, \gamma_\nu) - K_\infty)(K(\varphi, \gamma_\nu) - K_0)}{(K_0 - K_\infty)\gamma_\nu} \quad , \quad \forall \nu \quad , \quad (4.61b)$$

bestimmt. Um die Empfindlichkeit der charakteristischen Funktion gegenüber Änderungen des Koeffizienten γ_ν zu berechnen, wird $K(\varphi, \gamma_\nu)$ für γ_ν , $\gamma_\nu \rightarrow \infty$ und $\gamma_\nu = 0$ berechnet.

Wir nehmen an, daß nur der Wert des Koeffizienten γ_ν um $\Delta\gamma_\nu$ geändert wird und die restlichen Koeffizienten konstant bleiben. Wir können die Abweichung der charakteristischen Funktion

$$\Delta K = K(\varphi, \gamma_\nu + \Delta\gamma_\nu) - K(\varphi, \gamma_\nu) \quad (4.62)$$

mit Hilfe von (4.59)-(4.61) wie folgt bestimmen:

$$\Delta K = \frac{\partial K(\varphi, \gamma_\nu)}{\partial \gamma_\nu} \cdot \frac{\Delta\gamma_\nu}{1 + \frac{\Delta\gamma_\nu}{a_\nu + \gamma_\nu}}, \quad \forall \nu. \quad (4.63)$$

Wir wollen nun der zulässige Bereich von γ_ν bestimmen, falls die angegebenen Dämpfungsanforderungen erfüllt werden müssen. Wir nehmen an, daß nur γ_ν geändert wird und die restlichen Koeffizienten konstant bleiben. Die Dämpfung $A = A_{21}$ soll bei einer Frequenz φ_o größer als eine untere Grenze A_l und kleiner als eine obere Grenze A_u sein, d.h.,

$$A_l \leq A_{21}(\varphi_o) \leq A_u. \quad (4.64)$$

Mit Hilfe von (2.14a) können wir eine Schranke für den Betrag der charakteristischen Funktion $C(j\varphi)$ angeben:

$$C_l^2 \leq |C(j\varphi_o)|^2 \leq C_u^2 \quad (4.65a)$$

mit

$$C_l^2 = 10^{A_l/10} - 1, \quad C_u^2 = 10^{A_u/10} - 1. \quad (4.65b, c)$$

Mit Hilfe von (4.59) können wir schreiben

$$k_l^2 \leq \left| \frac{b_\nu + x}{a_\nu + x} \right|^2 \leq k_u^2, \quad (4.66a)$$

wobei

$$k_l^2 = \frac{C_l^2}{K_\infty^2}, \quad k_u^2 = \frac{C_u^2}{K_\infty^2}, \quad x = \gamma_\nu \quad (4.66b, c, d)$$

sind und a_ν , b_ν und K_∞ in (4.60) für $\varphi = \varphi_o$ berechnet sind. Gemäß (4.66) erhalten wir die folgenden Ungleichungen

$$(1 - k_l^2)x^2 + 2(b_\nu - a_\nu k_l^2)x + b_\nu^2 - k_l^2 a_\nu^2 \geq 0, \quad (4.67a)$$

$$(1 - k_u^2)x^2 + 2(b_\nu - a_\nu k_u^2)x + b_\nu^2 - k_u^2 a_\nu^2 \leq 0. \quad (4.67b)$$

Durch die Lösung dieser Ungleichungen läßt sich der zulässige Bereich von x wie folgt bestimmen:

Für $k_l < 1$ gilt:

$$x \leq x_2, \quad x \geq x_1 \quad \text{für} \quad b_\nu \leq a_\nu, \quad (4.68a)$$

$$x \leq x_1, \quad x \geq x_2 \quad \text{für } b_\nu > a_\nu, \quad (4.68b)$$

für $k_l > 1$ gilt:

$$x_2 \leq x \leq x_1 \quad \text{für } b_\nu \leq a_\nu, \quad (4.68c)$$

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad \text{für } b_\nu > a_\nu, \quad (4.68d)$$

wobei

$$x_1 = \frac{-b_\nu + a_\nu k_l}{1 - k_l}, \quad x_2 = \frac{-b_\nu - a_\nu k_l}{1 + k_l} \quad (4.68e, f)$$

sind. Für $k_u < 1$ gilt:

$$x_4 \leq x \leq x_3 \quad \text{für } b_\nu \leq a_\nu, \quad (4.69a)$$

$$x_3 \leq x \leq x_4 \quad \text{für } b_\nu > a_\nu, \quad (4.69b)$$

für $k_u > 1$ gilt:

$$x \leq x_4, \quad x \geq x_3 \quad \text{für } b_\nu \leq a_\nu, \quad (4.69c)$$

$$x \leq x_3, \quad x \geq x_4 \quad \text{für } b_\nu > a_\nu, \quad (4.69d)$$

wobei

$$x_3 = \frac{-b_\nu + a_\nu k_u}{1 - k_u}, \quad x_4 = \frac{-b_\nu - a_\nu k_u}{1 + k_u} \quad (4.69e, f)$$

sind. Die Abweichungen der einzelnen Koeffizienten sind ein gutes Maß, um die Variationsintervalle der Koeffizienten vor der diskreten Optimierung zu bestimmen. Wir werden im Abschnitt 4.7 an Beispielen zeigen, daß die Rechenzeit für die diskrete Optimierung erheblich reduziert werden kann, falls die Variationsintervalle der einzelnen Koeffizienten in (4.47) proportional zu den zulässigen Abweichungen der einzelnen Koeffizienten gewählt werden. Wir nehmen an, daß die zulässigen Abweichungen der einzelnen Koeffizienten

$$\Delta\gamma'_i = \gamma'_{u_i} - \gamma'_{l_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.70)$$

mit Hilfe von (4.68) und (4.69) für die Frequenzpunkte ω_ν , $\nu = 1, 2, \dots, r$ berechnet sind, wobei r die Anzahl der betrachteten Frequenzpunkte ist. Wir können die Variationsbreite

$$\Delta\gamma_i = \gamma_{u_i} - \gamma_{l_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.71)$$

durch

$$\Delta\gamma_i = \Delta\gamma \frac{\Delta\gamma'_i}{\Delta\gamma'_{max}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \Delta\gamma'_{max} = \max\{\Delta\gamma'_1, \Delta\gamma'_2, \dots, \Delta\gamma'_n\}, \quad (4.72a, b)$$

bestimmen, wobei $\Delta\gamma$ das größte untersuchte Variationsintervall ist, und $\Delta\gamma$ abhängig von der Anzahl der diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten passend gewählt werden kann. Je größer $\Delta\gamma$ ist, desto größer wird die Rechenzeit für die diskrete Optimierung sein. Wir werden im Abschnitt 4.7 für die Wahl von $\Delta\gamma$ einige Beispiele geben.

4.6 Rekursive Formeln für die effiziente Berechnung der Übertragungsfunktion von Digitalfiltern für die systematisch geänderten Koeffizientenwerte

Bekanntlich existieren verschiedene Methoden, um die Übertragungsfunktion eines linearen Digitalfilters in Abhängigkeit von Änderungen des Koeffizientenvektors $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ zu bestimmen. Prinzipiell sind alle Methoden, die für die linearen elektrischen Netzwerke bekannt sind, für lineare Digitalfilter anwendbar. Eine Methode ist die wiederholte Analyse des Digitalfilters, d.h., die Übertragungsfunktion soll für jeden Koeffizientenvektor $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ neu berechnet werden. Verschiedene Lösungsvorschläge für die Analyse von linearen Netzwerken wurden in [60-67] angegeben. Ein Analyseprogramm "SPASS" für die Berechnung der Übertragungsfunktion eines beliebigen linearen Digitalfilters wurde im Rechner DOMAIN implementiert [68]. Dieses Programm wurde mit Hilfe des in [69] beschriebenen Verfahrens für die Lösung der linearen Gleichungen entwickelt. Bei diesem Verfahren werden die Spalten und Zeilen der schwachbesetzten Matrizen so umgeordnet, daß bei der LR-Faktorisierung möglichst wenig Rechenoperationen benötigt werden. Da die Übertragungsfunktion eines Digitalfilters bei der diskreten Optimierung für viele Koeffizientenvektoren $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ mehrmals berechnet werden muß, ist die wiederholte Analyse für die diskrete Optimierung nicht gut geeignet. Ein typisches Beispiel für die Anzahl der Koeffizientenvektoren, die während der diskreten Optimierung geprüft werden müssen, ist 10^6 . Wenn wir auch verschiedene Frequenzen betrachten, kommt noch ein weiterer Faktor dazu.

Eine andere Methode für die Berechnung der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von Änderungen des Koeffizientenvektors $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ ist die Approximation der Übertragungsfunktion mit Hilfe der Taylorreihe, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird [52]. Bei dieser Methode wird die Berechnung der Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion gegenüber den einzelnen Koeffizienten benötigt. Die Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion kann durch Multiplikation zweier Übertragungsfunktionen berechnet werden [70]. Um diese Übertragungsfunktionen zu bestimmen, wird das originale und das transponierte Digitalfilter einmal analysiert. Mit Hilfe dieser Methode kann die Übertragungsfunktion eines Digitalfilters in Abhängigkeit der Änderungen des Koeffizientenvektors sehr effizient berechnet werden. Wenn die Koeffizienten von ihren Anfangswerten stark abweichen, ist die Approximation der Übertragungsfunktion durch die Taylorreihe nicht mehr anwendbar, da die Approximation nur für kleinere Änderungen des Koeffizientenvektors $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ gilt. Man kann in der Taylorreihe weitere Glieder betrachten, in diesem Fall wird der Rechenaufwand vergrößert.

Eine weitere Methode für die Berechnung der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von den Änderungen des Koeffizientenvektors $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ ist die Multiparameteranalyse von linearen Netzwerken [71-76, 54, 55]. Mit Hilfe dieser Methode kann die Übertragungsfunktion eines linearen Digitalfilters für einen Koeffizientenvektor $\underline{\gamma}_{neu}$ mit Hilfe der Übertragungsfunktion für $\underline{\gamma}_{alt}$ berechnet werden. In [54, 55] wurde gezeigt, daß man für die Berechnung der Übertragungsfunktion für $\underline{\gamma}_{neu}$ mit Hilfe der Übertragungsfunktion für $\underline{\gamma}_{alt}$ die Lösung von m linearen Gleichungen und eine Multiplikation zweier Vektoren der Dimension m benötigt, falls die Werte von m Koeffizienten mit $m \leq n$ geändert sind. Das ist eine große Reduzierung des Rechenaufwandes ge-

genüber der Methode mit wiederholter Analyse, da bei der wiederholten Analyse die Anzahl der Gleichungen, die gelöst werden müssen, gleich der Anzahl der Gesamtknoten des Digitalfilters ist. Wir werden hier ein neuartiges Verfahren für die Berechnung der Übertragungsfunktion angeben. Dieses Verfahren ist für die systematische Änderungen der Koeffizientenwerte bzw. für den in Abschnitt 4.3 vorgeschlagenen diskreten Optimierungsalgorithmus sehr gut geeignet.

Wir betrachten in Bild 4.7 ein lineares Digitalfilter, dessen Übertragungsverhalten in Abhängigkeit von Änderungen von n Multipliziererkoeffizienten γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, untersucht werden soll. Das restliche Netzwerk N enthält Verzögerungen, Addierer, Subtrahierer und Multiplizierer mit konstanten Koeffizientenwerten.

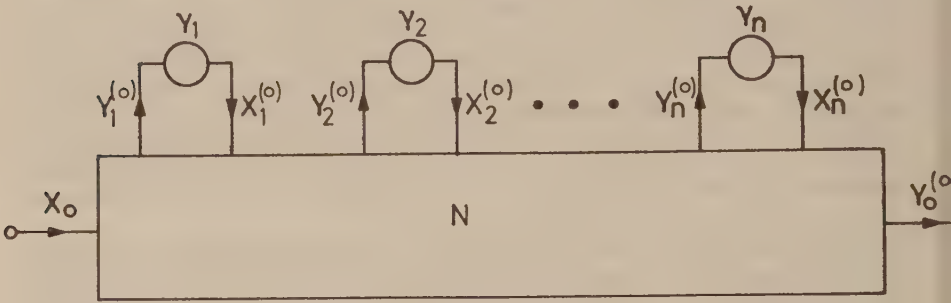


Bild 4.7 Ein lineares Digitalfilter. Das digitale Netzwerk N enthält Verzögerungen, Addierer, Subtrahierer und Multiplizierer.

Wir nehmen an, daß am Eingang des Digitalfilters ein sinusförmiges Signal mit der Frequenz ω_0 liegt. Die komplexen Amplituden des Eingangs- und Ausgangssignals bei stationärem Zustand seien X_0 und $Y_0^{(0)}$. Die Übertragungsfunktion dieses Digitalfilters wird durch

$$H_{00}^{(0)} = \frac{Y_0^{(0)}}{X_0} \quad (4.73)$$

bestimmt [4,77]. Die komplexen Amplituden der Signale am Eingang und Ausgang der n Multiplizierer bei stationärem Zustand seien $Y_i^{(0)}$ und $X_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, d.h.,

$$X_i^{(0)} = \gamma_i Y_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.74)$$

Nun wird ein Multiplizierer mit dem Koeffizienten γ_1 aus der Schaltung entfernt (Bild 4.8). Da das Digitalfilter linear ist, können wir die Ausgangssignale $Y_i^{(1)}$, $i = 0, 1$, als lineare Kombinationen von zwei Eingangssignalen X_0 und $X_1^{(1)}$ wie folgt ausdrücken [77]:

$$Y_0^{(1)} = H_{00}^{(1)} X_0 + H_{01}^{(1)} X_1^{(1)}, \quad (4.75a)$$

$$Y_1^{(1)} = H_{10}^{(1)} X_0 + H_{11}^{(1)} X_1^{(1)} \quad , \quad (4.75b)$$

wobei die komplexen Größen $H_{ij}^{(1)}$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$ unabhängig von den Signalwerten sind.

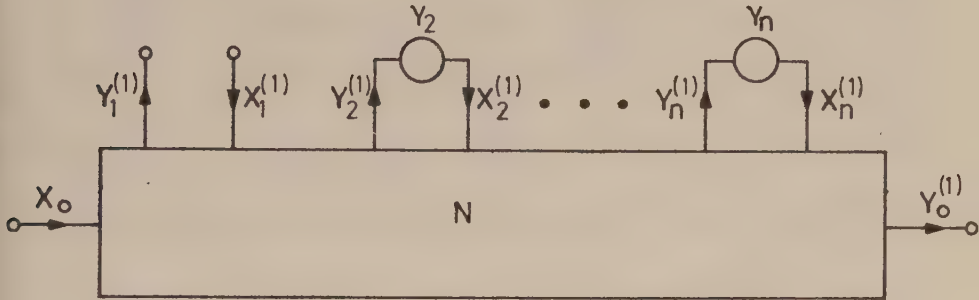


Bild 4.8 Das Digitalfilter in Bild 4.7, wobei der Multiplizierer γ_1 aus der Schaltung herausgenommen ist.

Wir nehmen an, daß

$$X_1^{(1)} = \gamma_1 Y_1^{(1)} \quad (4.76)$$

ist, dann können wir schreiben

$$Y_i^{(1)} = Y_i^{(0)} \quad , \quad i = 0, 1 \quad , \quad (4.77a)$$

$$X_1^{(1)} = X_1^{(0)} \quad . \quad (4.77b)$$

Wenn wir (4.76), (4.77) in (4.75) einsetzen und $Y_1^{(1)}$ aus den Gleichungen eliminieren, erhalten wir durch den Vergleich mit (4.73) zwischen $H_{00}^{(0)}$ und $H_{ij}^{(1)}$, $j = 0, 1$, $i = 0, 1$, den folgenden Zusammenhang:

$$H_{00}^{(0)} = H_{00}^{(1)} + \frac{H_{01}^{(1)} H_{10}^{(1)}}{\frac{1}{\gamma_1} - H_{11}^{(1)}} \quad . \quad (4.78)$$

Wenn wir, wie man aus der Sicht der Praxis näherungsweise tun kann, die Kosten der Multiplikation bzw. Division mit *Eins* und die Kosten der Addition bzw. Subtraktion mit *Null* bezeichnen, werden die Kosten für die Berechnung von (4.78) für jedes neue $1/\gamma_1$ Eins sein, falls $H_{00}^{(1)}$, $H_{11}^{(1)}$ und $(H_{01}^{(1)} H_{10}^{(1)})$ bekannt sind. Die Größen $H_{ij}^{(1)}$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$, sind unabhängig von $1/\gamma_1$ aber sie können von den restlichen Koeffizienten γ_i , $i = 2, 3, \dots, n$, abhängen.

Nun wird ein weiterer Multiplizierer mit dem Koeffizienten γ_2 aus der Schaltung entfernt (Bild 4.9).

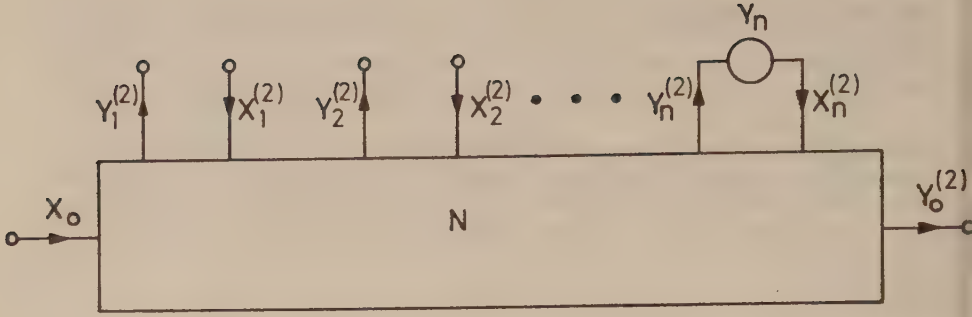


Bild 4.9 Das Digitalfilter in Bild 4.7, wobei die Multiplizierer mit den Koeffizienten γ_1 und γ_2 aus der Schaltung herausgenommen sind.

Da das Digitalfilter linear ist, können wir die Ausgangssignale $Y_i^{(2)}$, $i = 0, 1, 2$, als lineare Kombinationen der Eingangssignale X_0 , $X_i^{(2)}$, $i = 1, 2$, wie folgt ausdrücken:

$$Y_0^{(2)} = H_{00}^{(2)} X_0 + H_{01}^{(2)} X_1^{(2)} + H_{02}^{(2)} X_2^{(2)} \quad , \quad (4.79a)$$

$$Y_1^{(2)} = H_{10}^{(2)} X_0 + H_{11}^{(2)} X_1^{(2)} + H_{12}^{(2)} X_2^{(2)} \quad , \quad (4.79b)$$

$$Y_2^{(2)} = H_{20}^{(2)} X_0 + H_{21}^{(2)} X_1^{(2)} + H_{22}^{(2)} X_2^{(2)} \quad , \quad (4.79c)$$

wobei X_0 , $X_i^{(2)}$, $i = 1, 2$ und $Y_i^{(2)}$, $i = 0, 1, 2$ die komplexen Amplituden der zugehörigen Signale bei stationärem Zustand sind und die komplexen Größen $H_{ij}^{(2)}$, $j = 0, 1, 2$, $i = 0, 1, 2$ unabhängig von den Signalwerten sind. Wenn wir annehmen, daß

$$X_2^{(2)} = \gamma_2 Y_2^{(2)} \quad , \quad X_1^{(2)} = X_1^{(1)} \quad (4.80a, b)$$

sind, dann können wir schreiben

$$Y_i^{(2)} = Y_i^{(1)} \quad , \quad i = 0, 1, 2 \quad , \quad (4.81a)$$

$$X_2^{(2)} = X_2^{(1)} \quad . \quad (4.81b)$$

Wenn wir (4.80), (4.81) in (4.79) einsetzen und $Y_2^{(2)}$ aus den Gleichungen eliminieren, erhalten wir durch den Vergleich mit (4.75a,b) zwischen $H_{ij}^{(1)}$, $j = 0, 1$, $i = 0, 1$, und $H_{ij}^{(2)}$, $j = 0, 1, 2$, $i = 0, 1, 2$, die folgenden Zusammenhänge:

$$H_{00}^{(1)} = H_{00}^{(2)} + \frac{H_{02}^{(2)} H_{20}^{(2)}}{\frac{1}{\gamma_2} - H_{22}^{(2)}} \quad , \quad H_{01}^{(1)} = H_{01}^{(2)} + \frac{H_{02}^{(2)} H_{21}^{(2)}}{\frac{1}{\gamma_2} - H_{22}^{(2)}} \quad , \quad (4.82a, b)$$

$$H_{10}^{(1)} = H_{10}^{(2)} + \frac{H_{12}^{(2)} H_{20}^{(2)}}{\frac{1}{\gamma_2} - H_{22}^{(2)}} \quad , \quad H_{11}^{(1)} = H_{11}^{(2)} + \frac{H_{12}^{(2)} H_{21}^{(2)}}{\frac{1}{\gamma_2} - H_{22}^{(2)}} \quad (4.82c, d)$$

Falls die komplexen Grössen $H_{ij}^{(2)}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, 2$ und $(H_{i2}^{(2)} H_{2j}^{(2)})$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$, bekannt sind, werden die Kosten für die Berechnung von (4.82) 2^2 sein. Die Gesamtkosten für die Berechnung der Übertragungsfunktion $H_{00}^{(0)}$ für jeden neuen Wert von $1/\gamma_2$ sind 6, denn eine Multiplikation für die Berechnung von $(H_{01}^{(1)} H_{10}^{(1)})$ und eine Division für die Berechnung von (4.78) werden benötigt. Daher ist es sinnvoll für $1/\gamma_2$ den Koeffizienten zu wählen, dessen Wert weniger gändert wird als $1/\gamma_1$. Die komplexen Grössen $H_{ij}^{(2)}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, 2$, sind unabhängig von $1/\gamma_i$, $i = 1, 2$, aber sie können von den restlichen Koeffizienten $1/\gamma_i$, $i = 3, 4, \dots, n$ abhängen.

Wir entfernen nun $(k-1)$ Multiplizierer aus der Schaltung (Bild 4.10a), wobei k eine beliebige ganze Zahl mit $1 \leq k \leq n$ ist.

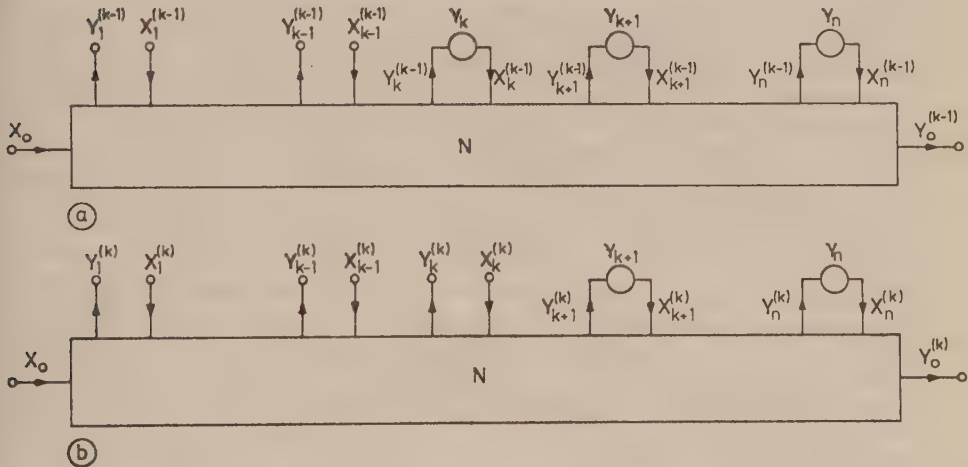


Bild 4.10 a) Das Digitalfilter in Bild 4.7, wobei $(k-1)$ Koeffizienten aus der Schaltung entfernt sind, b) das Digitalfilter in Bild 4.10a, wobei zusätzlich der k -te Koeffizient aus der Schaltung entfernt ist.

Da das Digitalfilter linear ist, können wir die Ausgangssignale $Y_i^{(k-1)}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, als lineare Kombinationen von den Eingangssignalen $X_0, X_i^{(k-1)}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ wie folgt ausdrücken:

$$\underline{Y}^{(k-1)} = \underline{H}^{(k-1)} \underline{X}^{(k-1)} \quad , \quad (4.83a)$$

$$\underline{X}^{(k-1)} = [X_0, X_1^{(k-1)}, \dots, X_{k-1}^{(k-1)}]^T, \quad (4.83b)$$

$$\underline{Y}^{(k-1)} = [Y_0^{(k-1)}, Y_1^{(k-1)}, \dots, Y_{k-1}^{(k-1)}]^T, \quad (4.83c)$$

$$\underline{H}^{(k-1)} = \begin{pmatrix} H_{00}^{(k-1)} & H_{01}^{(k-1)} & \dots & H_{0,k-1}^{(k-1)} \\ H_{10}^{(k-1)} & H_{11}^{(k-1)} & \dots & H_{1,k-1}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k-1,0}^{(k-1)} & H_{k-1,1}^{(k-1)} & \dots & H_{k-1,k-1}^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad (4.83d)$$

wobei $Y_i^{(k-1)}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$ und $X_0, X_i^{(k-1)}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, die komplexen Amplituden der zugehörigen Signale bei stationärem Zustand sind und die komplexen Größen $H_{ij}^{(k-1)}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, unabhängig von den Signalwerten sind. Nun wird der k -te Multiplizierer aus der Schaltung in Bild 4.10a entfernt (Bild 4.10b). Wir können wieder die Ausgangssignale $Y_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, k$, als lineare Kombinationen von den Eingangssignalen $X_0, X_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, k$, wie folgt ausdrücken:

$$\underline{Y}^{(k)} = \underline{H}^{(k)} \underline{X}^{(k)}, \quad (4.84a)$$

$$\underline{X}^{(k)} = [X_0, X_1^{(k)}, \dots, X_k^{(k)}]^T, \quad (4.84b)$$

$$\underline{Y}^{(k)} = [Y_0^{(k)}, Y_1^{(k)}, \dots, Y_k^{(k)}]^T, \quad (4.84c)$$

$$\underline{H}^{(k)} = \begin{pmatrix} H_{00}^{(k)} & H_{01}^{(k)} & \dots & H_{0k}^{(k)} \\ H_{10}^{(k)} & H_{11}^{(k)} & \dots & H_{1k}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k0}^{(k)} & H_{k1}^{(k)} & \dots & H_{kk}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (4.84d)$$

wobei $Y_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, k$ und $X_0, X_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, die komplexen Amplituden der zugehörigen Signale bei stationärem Zustand sind und die Koeffizienten $H_{ij}^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, k$, unabhängig von den Signalwerten sind. Wenn wir annehmen, daß

$$X_k^{(k)} = \gamma_k Y_k^{(k)} \quad \text{und} \quad X_i^{(k)} = X_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, (k-1) \quad (4.85a, b)$$

sind, dann können wir schreiben

$$Y_i^{(k)} = Y_i^{(k-1)}, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad (4.86a)$$

$$X_k^{(k)} = X_k^{(k-1)}. \quad (4.86b)$$

Wenn wir (4.85), (4.86) in (4.84a) einsetzen und $Y_k^{(k)}$ aus den Gleichungen eliminieren, erhalten wir durch den Vergleich mit (4.83a) zwischen $H_{ij}^{(k-1)}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, und $H_{ij}^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, k$ die folgenden Zusammenhänge:

$$H_{ij}^{(k-1)} = H_{ij}^{(k)} + \frac{H_{ik}^{(k)} H_{kj}^{(k)}}{\gamma_k - H_{kk}^{(k)}} \quad \text{für} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$j = 0, 1, \dots, k-1, \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \quad (4.87)$$

Falls die Elemente der Matrix $\underline{H}^{(k)}$ und $(H_{ik}^{(k)} H_{kj}^{(k)})$, $i = 0, 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, k$, bekannt sind, werden die Kosten für die Berechnung der Elemente von $\underline{H}^{(k-1)}$ k^2 sein. Um die Grössen $(H_{i,k-1}^{(k-1)} H_{k-1,j}^{(k-1)})$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, zu bestimmen, brauchen wir $(k-1)^2$ Multiplikationen. Die Gesamtkosten für die Berechnung der Übertragungsfunktion $H_{00}^{(0)}$ für neue Werte der $1/\gamma_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, k$, $1 \leq k \leq n$ ist

$$Q_k = \sum_{\nu=1}^k [\nu^2 + (\nu-1)^2] = \frac{2}{3}k^3 + \frac{k}{3}, \quad (4.88)$$

wenn die Elemente von $\underline{H}^{(k)}$ und die Grössen $(H_{ik}^{(k)} H_{kj}^{(k)})$, $i = 0, 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, k$ bekannt sind. Aus (4.88) stellen wir fest, daß gilt

$$Q_k > Q_{k-1}, \quad 1 < k \leq n, \quad (4.89)$$

d.h., die Kosten für die Berechnung der Übertragungsfunktion für jedes neue $1/\gamma_k$ sind größer als die Kosten für die Berechnung der Übertragungsfunktion für jedes neue $1/\gamma_{k-1}$. Daher können wir die Änderung der Koeffizientenwerte so gestalten, daß der meist geänderte Koeffizient als erster Koeffizient gewählt wird. Damit wird die Übertragungsfunktion $H_{00}^{(0)}$ bei den systematischen Änderungen der Koeffizienten sehr effizient berechnet. Die Werte von $1/\gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, sollen vor den systematischen Änderungen gerechnet werden, um den Rechenaufwand zu reduzieren. Das ist, wie im Abschnitt 4.3 beschrieben wurde, mit Hilfe von Tabellen (look-up tables) sehr einfach möglich. Falls die Übertragungsfunktion für die Änderungen von n Koeffizienten mit Hilfe von (4.87) berechnet werden soll, muß für das Digitalfilter einmal $(n+1)$ Analyse durchgeführt werden um die Elemente von $\underline{H}^{(n)}$ zu bestimmen.

Beispiel

Wir nehmen an, daß wir vier Koeffizienten γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ haben und die Werte dieser Koeffizienten sollen systematisch geändert und für jede Kombination der Koeffizientenwerte die Übertragungsfunktion berechnet werden. Tabelle 4.6 zeigt die Anzahl der Koeffizientenwerte.

TABELLE 4.6
Anzahl der Koeffizientenwerte

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
10	7	6	5

Da die Anzahl der Koeffizientenwerte von γ_1 am größten und von γ_4 am kleinsten ist, werden wir γ_1 am häufigsten ändern und den Koeffizienten γ_4 am wenigsten. Die Gesamtkosten Q_g für die Berechnung der Übertragungsfunktion $H_{00}^{(0)}$ für alle Kombinationen der Koeffizienten sind

$$Q_g = 5Q_4 + 5 \cdot 6 \cdot Q_3 + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot Q_2 + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot Q_1. \quad (4.90)$$

Wenn wir Q_i , $i = 1, 2, 3, 4$, gemäß (4.88) in (4.90) einsetzen, erhalten wir für die Gesamtkosten $Q_g = 4150$. Wir haben 2100 Kombinationen der Koeffizientenwerte. Die durchschnittlichen Kosten pro Kombination sind ungefähr 2, d.h., für jede neue Kombination der Koeffizientenwerte brauchen wir durchschnittlich 2 Punktoperationen. Wenn die Anzahl der Kombinationen größer wird, dann werden die durchschnittlichen Kosten pro Kombination weiter sinken. Diese Art der Berechnung der Übertragungsfunktion ist für den im Abschnitt 4.3 beschriebenen diskreten Optimierungsalgorithmus sehr gut geeignet.

Ein diskretes Optimierungsprogramm "DOMAD", das die Multipliziererkoeffizienten von allgemeinen Digitalfilterstrukturen mit Hilfe von im Abschnitt 4.3 angegebenen Optimierungsalgorithmus diskret optimiert und die rekursive Formeln in (4.87) benutzt, wurde im Rechner CYBER implementiert [95]. Dieses Programm ist in der Lage pro Sekunde (CPU Zeit) durchschnittlich 8500 Koeffizientenvektoren im CYBER zu Prüfen.

4.7 Beispiele für die diskrete Optimierung

Wir wollen in diesem Abschnitt die Beispiele wählen, die bereits mit einem anderen diskreten Optimierungsalgorithmus getestet wurden. Damit können wir unseren Optimierungsalgorithmus mit den bereits existierenden Optimierungsalgorithmen vergleichen.

Beispiel 1

Wir betrachten in Bild 4.11b die Dämpfungsanforderungen eines Tiefpasses, der für einen 12-Kanal Transmultiplexer [93] entworfen wurde. Die Abtastfrequenz ist $F = 120 \text{ kHz}$. Dieses Tiefpaßfilter wurde in [14] unter Benutzung des Brücken-Wellendigitalfilters 3. Grades entworfen (Bild 4.11a) und die diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten wurden im CSD-Code wie folgt ermittelt:

$$\gamma_1 = 0.-1 \quad , \quad \gamma_2 = 0.001 \quad , \quad \gamma_3 = 0.0-1 \quad . \quad (4.91a, b, c)$$

Diese Koeffizienten erfüllen nicht an allen Frequenzpunkten die angegebenen Dämpfungsanforderungen. Wir wollen nun die Koeffizienten dieses Brücken-Wellendigitalfilters mit unserem Optimierungsalgorithmus diskret optimieren. Zunächst müssen wir das Realisierungsmaß für die Koeffizienten bei der diskreten Optimierung definieren. Als Realisierungsmaß wird nur die Anzahl der Implizitaddierer betrachtet, d.h., $R_i = R_{ai}$, $R_{si} = 0$. Wir betrachten bei der diskreten Optimierung die Koeffizientenvektoren, deren Wortlänge maximal auf 12 Bit beschränkt sind.

Wir entwerfen zunächst den Tiefpaß mit der Durchlaßgrenze $f_{lp} = 24 \text{ kHz}$ und der Sperrgrenze $f_{ls} = 56 \text{ kHz}$. Die maximal zulässige Dämpfung im Durchlaßbereich ist $A_{lp} = 0.05 \text{ dB}$ und die minimal zulässige Dämpfung im Sperrbereich $A_{ls} = 70 \text{ dB}$. Ein Spielraum von 0.05 dB im Durchlaßbereich steht für die diskrete Optimierung der Koeffizienten zur Verfügung. Mit diesen Dämpfungsanforderungen erhalten wir den Tiefpaß 3. Grades (Bild 4.11a) mit den folgenden idealen Koeffizientenwerten:

$$\gamma_1 = -0.433 \ 172 \quad , \quad \gamma_2 = 0.037 \ 171 \quad , \quad \gamma_3 = -0.093 \ 522 \quad . \quad (4.92a, b, c)$$

Mit diesen Koeffizienten ist die minimale Dämpfung im Sperrbereich 71.7 dB. Ausgehend von diesen idealen Koeffizientenwerten werden die Variationsintervalle (γ_i , γ_{u_i}) durch

$$\gamma_i = \gamma_i - \Delta\gamma_i^- , \quad \gamma_{u_i} = \gamma_i + \Delta\gamma_i^+ , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.93a, b)$$

gewählt, wobei $n = 3$ ist und die Größen $\Delta\gamma_i^-$ und $\Delta\gamma_i^+$ durch die Empfindlichkeitsverhältnisse der Koeffizienten passend gewählt werden können. Da wir hier nur drei Koeffizienten diskret optimieren wollen, können wir die Variationsintervalle ohne Berücksichtigung der Empfindlichkeitsverhältnisse für jeden Koeffizienten gleich groß wählen. Wir werden in anderen Beispielen zeigen, wie die Größen $\Delta\gamma_i^-$ und $\Delta\gamma_i^+$ unter Berücksichtigung der Empfindlichkeiten der einzelnen Koeffizienten gewählt werden können. Wir wählen zunächst für jeden Koeffizienten $\Delta\gamma_i^- = 0.1$ und $\Delta\gamma_i^+ = 0.1$, $i = 1, 2, 3$. Mit diesen Variationsintervallen wurden zwei Koeffizientenvektoren mit gleicher Kostenfunktion $K(\gamma) = 2$ als diskrete Optima gefunden. Diese Koeffizientenvektoren sind im CSD-Kode wie folgt dargestellt:

$$\gamma_1 = 0. -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 , \quad \gamma_2 = 0 , \quad \gamma_3 = 0. \ 0 \ 0 -1 \ 0 -1 , \quad (4.94a, b, c)$$

$$\gamma_1 = 0. -1 \ 0 \ 0 \ 1 , \quad \gamma_2 = 0 , \quad \gamma_3 = 0. \ 0 \ 0 -1 \ 0 \ 0 \ 1 . \quad (4.95a, b, c)$$

Um die Lösung in (4.94) zu finden, werden insgesamt 19482 Koeffizientenvektoren innerhalb von 26.5 sec. (CPU-Zeit) im Rechner DOMAIN mit dem Programm "DOC" getestet. Durchschnittlich werden 735 Koeffizientenvektoren pro Sekunde getestet. Wir haben insgesamt 14 Frequenzpunkte angegeben, an denen die Dämpfungsanforderungen geprüft werden sollen. Für jeden Koeffizientenvektor wurde mindestens für einen Frequenzpunkt die Dämpfungsanforderungen geprüft. Wir haben die Variationsintervalle der Koeffizienten erhöht (Tabelle 4.7).

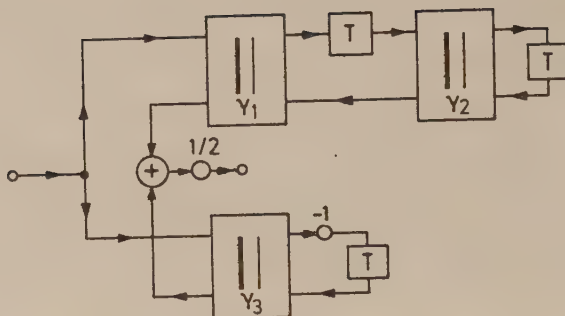
TABELLE 4.7

Diskrete Optimierungsergebnisse mit dem Programm "DOC"
und mit dem Rechner DOMAIN für Brücken-Wellendigitalfilter 3. Grades

$\Delta\gamma_i^-$ $i = 1, 2, 3$	$\Delta\gamma_i^+$ $i = 1, 2, 3$	$K(\underline{\gamma})$	CPU-Zeit für die Lösung (4.94) [sec.]	Anzahl der geprüften $\underline{\gamma}$	Anzahl der geprüften $\underline{\gamma}$ pro sec.
0.1	0.1	2	26.5	19482	735
0.2	0.2	2	56.1	67048	1197
0.3	0.3	2	73.4	95866	1306
0.4	0.4	2	132.6	240474	1813
0.5	0.5	2	391.1	813244	2079

Für alle Fälle haben wir die Lösungen in (4.94) und (4.95) als diskrete Optima gefunden. Es existiert kein anderer Koeffizientenvektor in betrachteten Variationsintervallen

(a)



(b)

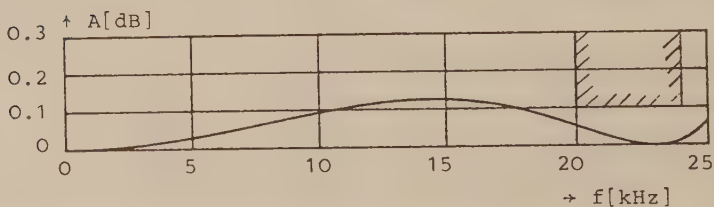
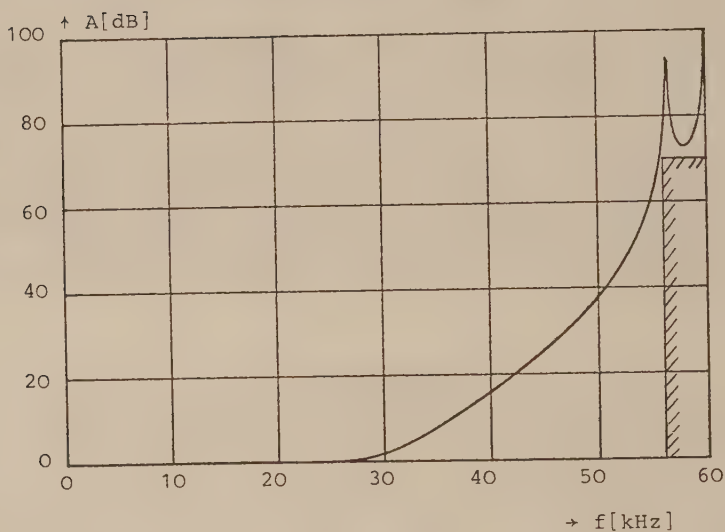


Bild 4.11 (a) Wellenflußdiagramm des Tiefpasses 3. Grades, (b) Dämpfungsverläufe im Sperr- und im Durchlaßbereich für die Koeffizientenwerte in (4.94)

mit maximal 12 Bit Wortlänge, für den die Dämpfungsanforderungen erfüllt sind und die Kostenfunktion $K(\underline{\gamma}) < 2$ ist. Da bei den Lösungen (4.94) und (4.95) $\gamma_2 = 0$ ist, werden drei Addierer für den Zweitor-Paralleladaptor gespart. Die Dämpfungsanforderungen in Bild 4.11b sind mit den Lösungen (4.94) und (4.95) erfüllt. Wenn wir den idealen Koeffizientenvektor nicht kennen würden, könnten wir für jeden Koeffizienten das ganze Variationsintervall $(-1,1)$ angeben. Mit diesen Variationsintervallen haben wir die Koeffizienten diskret optimiert. Die Lösung in (4.94a) wurde erst nach der Prüfung von $6.18 \cdot 10^6$ Koeffizientenvektoren innerhalb von 3085 sec. (CPU-Zeit) gefunden. Durchschnittlich wurden 2003 Koeffizientenvektoren pro Sekunde (CPU-Zeit) geprüft. Bild 4.11b zeigt die Dämpfungsverläufe für Sperr- und Durchlaßbereich mit den Koeffizientenwerten in (4.94).

Beispiel 2

Wir wählen ein Beispiel aus der Arbeit von R.Jain [55]. Die Dämpfungsanforderungen eines Tiefpasses sind wie folgt angegeben:

$$F = 64 \text{ kHz} \quad , \quad f_{lp} = 15.8 \text{ kHz} \quad , \quad f_{ls} = 16.3 \text{ kHz} \quad (4.96a, b, c)$$

$$A_{lp} = 0.1 \text{ dB} \quad , \quad A_{ls} = 60 \text{ dB} \quad , \quad (4.96d, e)$$

wobei A_{lp} die maximal zulässige Dämpfung im Durchlaßbereich, A_{ls} die minimal zulässige Dämpfung im Sperrbereich, f_{lp} die Durchlaßgrenze, f_{ls} die Sperrgrenze und F die Abtastfrequenz ist. Diese Dämpfungsanforderungen können mit einem bireziproken Brücken-Wellendigitalfilter 17. Grades erfüllt werden. Die minimale Dämpfung im Sperrbereich mit den idealen Koeffizientenwerten beträgt 68.1 dB. In [55] wurde ein bireziprokes Brücken-Wellendigitalfilter 19. Grades als Lösung der Dämpfungsanforderungen in (4.96) betrachtet. In diesem Fall beträgt die minimale Dämpfung im Sperrbereich mit den idealen Koeffizientenwerten 76.8 dB. Wir wollen zunächst das bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter 19. Grades diskret optimieren, um unsere Optimierungsergebnisse mit den in [55] angegebenen vergleichen zu können. Bild 4.12a zeigt das Wellenflußdiagramm dieses Tiefpasses. Als Realisierungsmaß wird die Anzahl der Implizitaddierer betrachtet, d.h., in (4.36) $R_i = R_{ai}$, $R_{si} = 0$. Wir betrachten die Koeffizientenvektoren, deren Wortlängen maximal auf 12 Bit beschränkt sind.

Ausgehend von den idealen Koeffizientenwerten wählen wir zunächst für jeden Koeffizienten ein Variationsintervall durch (4.93), wobei für jeden Koeffizienten $\Delta\gamma_i^- = 0.002$ und $\Delta\gamma_i^+ = 0.002$, $i = 1, 2, \dots, 9$ sind. Wir haben insgesamt 16 Frequenzpunkte gegeben, an denen die Dämpfungsanforderungen geprüft werden sollen. Mit dem Programm "DOC" wurde im Rechner DOMAIN eine Lösung mit $K(\underline{\gamma}) = 16$ nach der Prüfung von 5517 Koeffizientenvektoren innerhalb von 7 Sekunden (CPU-Zeit) gefunden. Die Variationsintervalle der Koeffizienten haben wir gemäß Tabelle 4.8 vergrößert. Das Realisierungsmaß des Koeffizientenvektors wurde bis auf $K(\underline{\gamma}) = 12$ reduziert. Die Lösung mit $K(\underline{\gamma}) = 12$ wurde nach der Prüfung von $1.67 \cdot 10^7$ Koeffizientenvektoren innerhalb von 5 Stunden (CPU-Zeit) gefunden. Es existieren mehrere Lösungen mit $K(\underline{\gamma}) = 12$. Die Ergebnisse der diskreten Optimierung werden in der Tabelle 4.8 zusammengefaßt. Die

in der Tabelle 4.8 angegebenen Werte von q entsprechen der Gesamtzahl der von Null verschiedenen Binärstellen des Koeffizientenvektors, d.h.,

$$q = \sum_{i=1}^n q_i, \quad (4.97)$$

wobei q_i gemäß (4.34) die Anzahl der von Null verschiedenen Binärstellen des Koeffizienten γ_i ist.

TABELLE 4.8

Ergebnisse der diskreten Optimierung für den Tiefpaß
19. Grades mit dem Programm "DOC" mit dem Rechner DOMAIN

$\Delta\gamma_i^-, i = 1, \dots, 9$ ($\Delta\gamma_i^+ = \Delta\gamma_i^-$)	$K(\gamma)$	q	CPU-Zeit [sec.]	Anzahl der geprüften γ	Anzahl der geprüften γ pro Sekunde
0.002	16	25	7	5517	788
0.004	15	24	126	140632	1116
0.006	14	23	1388	1597655	1151
0.012	12	21	18112	$1.67 \cdot 10^7$	926

Wir wollen nun untersuchen, ob die Rechenzeit für die diskrete Optimierung unter Berücksichtigung der Empfindlichkeiten der einzelnen Koeffizienten reduziert werden kann. Wir werden für die Koeffizienten, die weniger empfindlich sind, größere Variationsintervalle wählen als für die anderen Koeffizienten. Wir bestimmen zuerst mit Hilfe von (4.68) und (4.69) jeweils die zulässigen Abweichungen der Koeffizienten. In der Tabelle 4.9 werden die idealen Werte der Koeffizienten und das zulässige Intervall für jeden Koeffizienten angegeben.

TABELLE 4.9

Die zulässigen Intervalle der Koeffizienten

i	ideale Werte γ_i	Die zulässigen Intervalle der Koeffizienten ($\gamma'_{u_i}, \gamma'_{l_i}$)	$\Delta\gamma'_i$	$\Delta\gamma'_i/\Delta\gamma'_1$
1	-0.063 970	(-0.064 886, -0.063 101)	0.001 785	1
2	-0.423 067	(-0.423 819, -0.422 361)	0.001 459	0.817
3	-0.741 327	(-0.741 721, -0.740 935)	0.000 786	0.440
4	-0.905 567	(-0.905 666, -0.905 470)	0.000 196	0.109
5	-0.984 720	(-0.984 783, -0.983 990)	0.000 136	0.076
6	-0.226 119	(-0.227 015, -0.225 297)	0.001 718	0.962
7	-0.602 422	(-0.602 984, -0.601 868)	0.001 119	0.626
8	-0.839 323	(-0.839 580, -0.839 073)	0.000 507	0.284
9	-0.950 847	(-0.950 932, -0.950 745)	0.000 187	0.105

Aus der Tabelle 4.9 erkennen wir, daß die in (4.72b) definierte Größe $\Delta\gamma'_{max} = \Delta\gamma'_1$ ist. Die obere Variationsgrenze γ_{u_i} und die untere Variationsgrenze γ_{l_i} der Koeffizienten γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ werden durch

$$\gamma_{u_i} = \gamma_i + \frac{\Delta\gamma_i}{2}, \quad \gamma_{l_i} = \gamma_i - \frac{\Delta\gamma_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.98)$$

bestimmt, wobei γ_i die idealen Werte der Koeffizienten und $\Delta\gamma_i$ die gemäß (4.72) definierte Größe ist. Wir werden für die Größe $\Delta\gamma$ verschiedene Werte wählen. Tabelle 4.10 zeigt die für verschiedene $\Delta\gamma$ erhaltenen Lösungen.

TABELLE 4.10

Ergebnisse der diskreten Optimierung für den Tiefpaß 19. Grades mit dem Programm "DOC" mit dem Rechner DOMAIN unter Berücksichtigung der Empfindlichkeitsverhältnisse der Koeffizienten

$\Delta\gamma/2$	$K(\underline{\gamma})$	q	CPU-Zeit [sec.]	Anzahl der geprüften $\underline{\gamma}$	Anzahl der geprüften $\underline{\gamma}$ pro Sekunde
0.006	16	25	13	6058	454
0.008	16	25	152	86743	567
0.012	14	23	114	82302	721
0.025	11	20	5089	$5.05 \cdot 10^6$	992

Unter Berücksichtigung der Empfindlichkeiten der Koeffizienten wurden mehrere Lösungen gefunden, für die das Realisierungsmaß $K(\underline{\gamma}) = 11$ ist. Durch den Vergleich der Tabellen 4.9 und 4.10 stellen wir fest, daß die Rechenzeit unter Berücksichtigung der Empfindlichkeiten der Koeffizienten erheblich reduziert werden konnte.

In [55] wurde als Realisierungsmaß der Koeffizienten die Anzahl der von Null verschiedenen Binärstellen (non-zero bits) q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ benutzt und als Realisierungsmaß (Kostenfunktion) des Koeffizientenvektors die in (4.97) definierte Größe q . Die Größe q unterscheidet sich von $K(\underline{\gamma})$ in (4.41) durch eine additive Konstante n , d.h.,

$$q = K(\underline{\gamma}) + n, \quad (4.98)$$

wobei n die Anzahl der diskret optimierten Koeffizienten ist. In [55] wurde für den Tiefpaß 19. Grades (Beispiel 6, S.278-282) eine Lösung mit $K(\underline{\gamma}) = 22$ bzw. $q = 31$ durch die univariante Suche innerhalb von 5 Sekunden (CPU-Zeit im Rechner VAX11/780) gefunden. Ausgehend von dieser Lösung wurde durch die lokale Enumeration eine Lösung mit $K(\underline{\gamma}) = 18$ bzw. $q = 27$ innerhalb von 8 Sekunden gefunden. Ausgehend von dieser Lösung wurde eine Lösung mit $K(\underline{\gamma}) = 14$ bzw. $q = 25$ durch die multivariante Suche (multivariate search) innerhalb von 1 Minute gefunden. Durch die weiteren Experimente des Benutzers wurde mit der modifizierten multivarianten Suche eine Lösung mit $K(\underline{\gamma}) = 12$ bzw. $q = 21$ innerhalb von 30 Minuten gefunden. Die Ergebnisse dieser diskreten Optimierung aus [55] haben wir in der Tabelle 4.11 zusammengefaßt.

TABELLE 4.11

Ergebnisse der diskreten Optimierung für den Tiefpaß 19. Grades aus der Arbeit von R. Jain [55]. (Beispiel 6 in [55], S.278-282)

$K(\underline{\gamma})$	q	CPU-Zeit im VAX11/780 [sec.]
22	31	5
18	27	13
17	26	20
16	25	70
15	24	190
14	23	1210
13	22	1282
12	21	1582

Bei dem Vergleich der Tabellen 4.10 und 4.11 stellen wir fest, daß wir mit unserem Optimierungsalgorithmus eine bessere Lösung mit $K(\underline{\gamma}) = 11$ bzw. $q = 20$ gefunden haben. Das Wellenflußdiagramm des Tiefpasses 19. Grades wird in Bild 4.12a gezeichnet. Die Lösung mit $K(\underline{\gamma}) = 11$ bzw. $q = 20$ wird in Bild 4.12b angegeben. Die Dämpfungsverläufe im Sperr- und im Durchlaßbereich werden in Bild 4.12c gezeichnet.

Die Dämpfungsanforderungen in (4.96) können mit einem bireziproken Brücken-Wellendigitalfilter 17. Grades mit den idealen Multipliziererkoeffizienten erfüllt werden. In diesem Fall ist der Spielraum im Sperrbereich für die diskrete Optimierung 8.1 dB. Trotzdem haben wir mehrere Lösungen gefunden, für die $K(\underline{\gamma}) = 11$ bzw. $q = 19$ ist. Die diskreten Optimierungsergebnisse für den Tiefpaß 17. Grades werden in der Tabelle 4.12 zusammengefaßt.

TABELLE 4.12

Ergebnisse der diskreten Optimierung für den Tiefpaß 17. Grades mit dem Programm "DOC" mit Rechner DOMAIN unter Berücksichtigung der Empfindlichkeitsverhältnisse der Koeffizienten

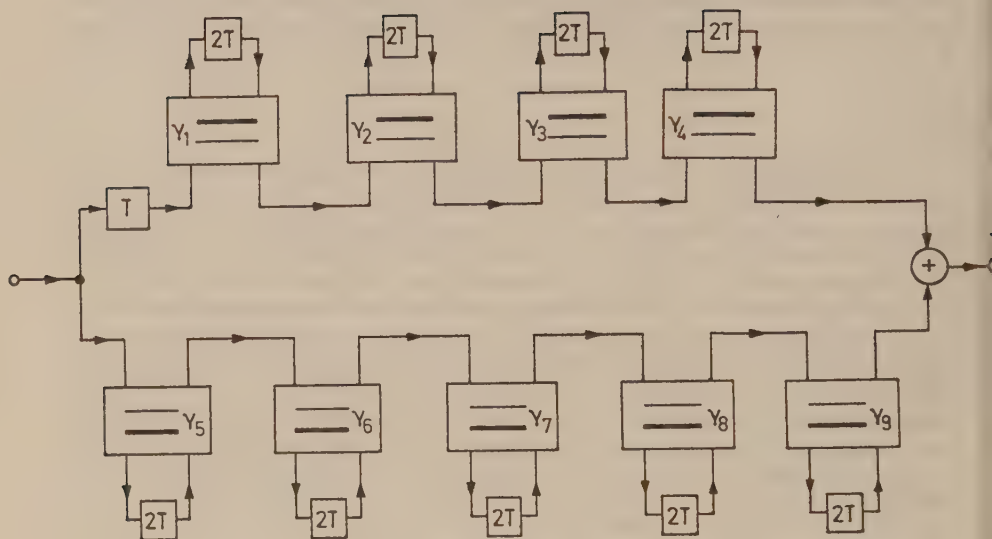
$\Delta\gamma/2$	$K(\underline{\gamma})$	q	CPU-Zeit [sec.]	Anzahl der geprüften $\underline{\gamma}$	Anzahl der geprüften $\underline{\gamma}$ pro Sekunde
0.002	19	27	0.4	52	109
0.004	17	25	5.3	3667	691
0.006	16	24	67.5	59356	878
0.012	11	19	6.5	4757	730

Durch die Reduzierung des Grades werden 2 Verzögerungselemente und ein Zweitor-Paralleladaptor, der drei Addierer (explicit adders) enthält, eingespart. Bild 4.13a zeigt das Wellenflußdiagramm des Tiefpasses 17. Grades. In Bild 4.13b werden die diskret optimierten Koeffizientenwerte angegeben. Bild 4.13c zeigt die Dämpfungsverläufe im Sperr- und im Durchlaßbereich mit dem diskret optimierten Koeffizientenvektor mit $K(\gamma) = 11$ bzw. $q = 19$.

Beispiel 3

Wir betrachten die Dämpfungsanforderungen eines Bandpasses in Bild 4.5. Diese Dämpfungsanforderungen können mit einem Brücken-Wellendigitalfilter 14. Grades erfüllt werden. Dieser Bandpaß wird durch die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (3.26) mit (3.37) aus einem Tiefpaß 7. Grades hergeleitet, wobei in (3.26) $\varphi_{ox} = 1$ ist. Jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses wird nach der Tiefpaß-Bandpaß-Transformation durch die Kaskadenschaltung zweier Verzögerungselemente und eines Vorzeichenumkehrers ersetzt (Bild 3.14b). Wenn man die Brückenzeige durch die Kaskadierung von Allpaßgliedern ersten und zweiten Grades und/oder durch die Kettenschaltung von Leitungselementen realisieren will, existieren vier verschiedene Möglichkeiten, dieses Brücken-Wellendigitalfilter zu entwerfen. Wir haben alle Möglichkeiten unter dem Gesichtspunkt der diskreten Optimierung untersucht. Nach der diskreten Optimierung mit dem Programm 'DOC' haben wir für die Struktur in Bild 4.14a die beste Lösung gefunden. Als Realisierungsmaß der Koeffizienten wurde nur die Anzahl der Implizitaddierer betrachtet. Für die Koeffizienten des Brücken-Wellendigitalfilters in Bild 4.14a wurde eine Lösung mit 6 Implizitaddierern innerhalb von 380 Sekunden (CPU-Zeit) mit dem Rechner DOMAIN gefunden. Diese Koeffizientenwerte sind in Bild 4.14c im CSD-Code angegeben. Die Dämpfungsverläufe im Sperr- und Durchlaßbereich mit diskret optimierten Koeffizientenwerten werden in Bild 4.14d gezeichnet.

(a)



(b)

$\gamma_1 = 0.0-1$
 $\gamma_2 = 0.-1\ 0-1\ 0\ 0\ 1$ ($\gamma_2'' = 0.1\ 0-1\ 0\ 0\ 1$)
 $\gamma_3 = -1.0\ 0\ 1\ 0\ 1$ ($\gamma_3'' = 0.0\ 0\ 1\ 0\ 1$)
 $\gamma_4 = -1.0\ 0\ 0\ 1\ 0-1\ 0\ 1\ 0-1$ ($\gamma_4'' = 0.0\ 0\ 0\ 1\ 0-1\ 0\ 1\ 0-1$)
 $\gamma_5 = 0.0\ 0\ 0\ 0-1\ 0-1\ 0\ 0\ 0\ 1$
 $\gamma_6 = 0.-1\ 0\ 0\ 1$
 $\gamma_7 = -1.0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$ ($\gamma_7'' = 0.0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$)
 $\gamma_8 = -1.0\ 0\ 1\ 0-1$ ($\gamma_8'' = 0.0\ 0\ 1\ 0-1$)
 $\gamma_9 = -1.0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$ ($\gamma_9'' = 0.0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$)

Bild 4.12 (a) Wellenflußdiagramm des Tiefpasses 19. Grades, (b) die diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten im CSD-Code.

(c)

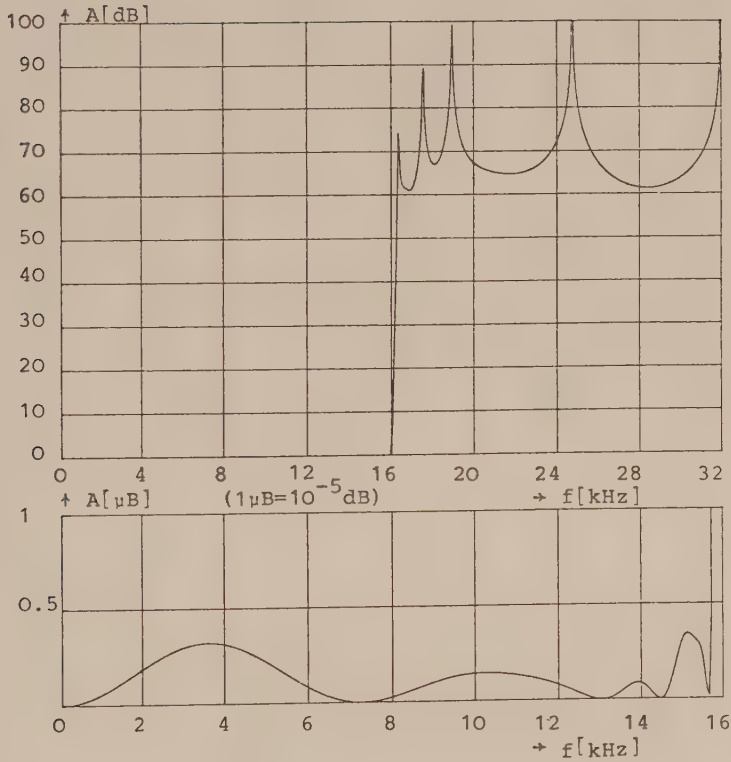
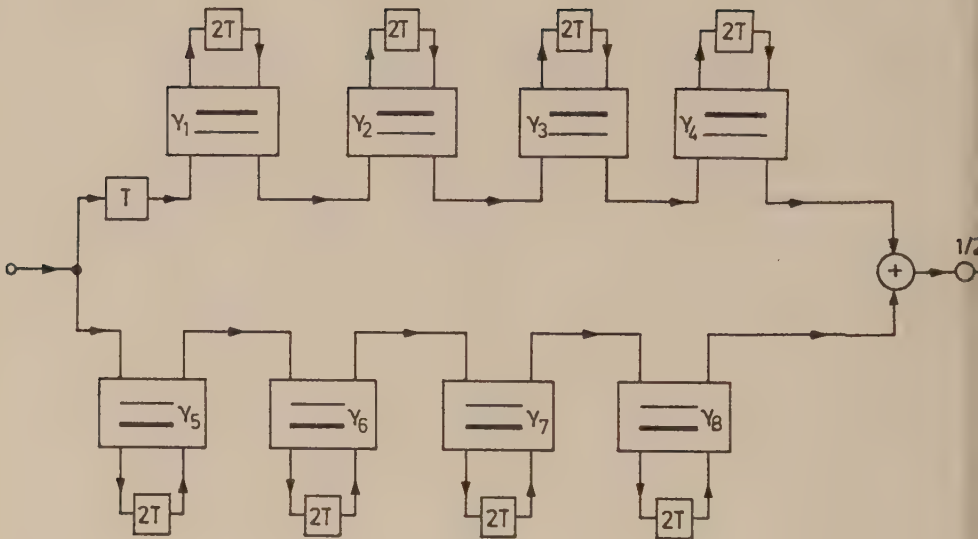


Bild 4.12 (c) Dämpfungsverläufe im Sperr- und im Durchlaßbereich mit den diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten.

(a)



(b)

$\gamma_1 = 0.01000-1$	
$\gamma_2 = -1.010101$	$(\gamma_2'' = 0.010101)$
$\gamma_3 = -1.00100-1$	$(\gamma_3'' = 0.00100-1)$
$\gamma_4 = -1.0000010001$	$(\gamma_4'' = 0.0000010001)$
$\gamma_5 = 0.000-10-100001$	
$\gamma_6 = 0-100001$	
$\gamma_7 = -1.010-1001$	$(\gamma_7'' = 0.010-1001)$
$\gamma_8 = -1.000100-1$	$(\gamma_8'' = 0.000100-1)$

Bild 4.13 (a) Wellenflußdiagramm des Tiefpasses 17. Grades, (b) die diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten im CSD-Kode.

(c)

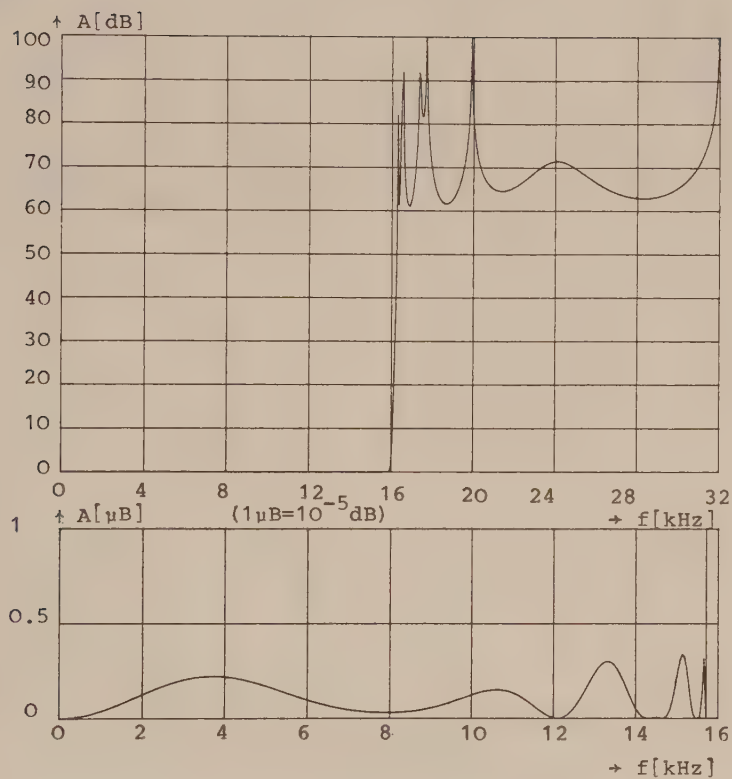
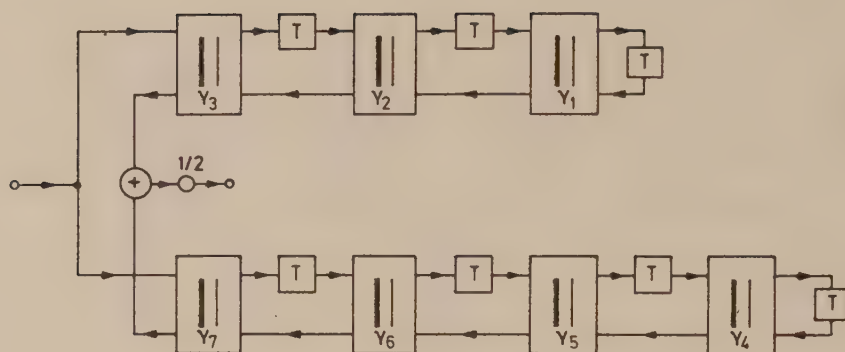
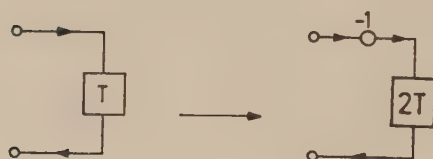


Bild 4.13 (c) Dämpfungsverläufe im Sperr- und im Durchlaßbereich.

(a)



(b)



(c)

$\gamma_1 = 1. 0-1 0 1$	$(\gamma'_1 = 0. 0 1 0-1)$
$\gamma_2 = -1. 0 1 0-1$	$(\gamma''_2 = 0. 0 1 0-1)$
$\gamma_3 = 0. 1 0 0 0 0 0-1$	
$\gamma_4 = 1. 0-1 0-1$	$(\gamma'_3 = 0. 0 1 0 1)$
$\gamma_5 = -1. 0 0 0 1$	$(\gamma''_4 = 0. 0 0 0 1)$
$\gamma_6 = 1. 0-1 0 0 1$	$(\gamma'_5 = 0. 0 1 0 0-1)$
$\gamma_7 = 0.-1 0 0 0 0 0 0 1$	

Bild 4.14 (a) Wellenflußdiagramm des Tiefpasses 7. Grades, (b) jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des Tiefpasses wird durch die Kaskadenschaltung zweier Verzögerungselemente und eines Vorzeichenumkehrers ersetzt, (c) die diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten im CSD-Code.

(d)

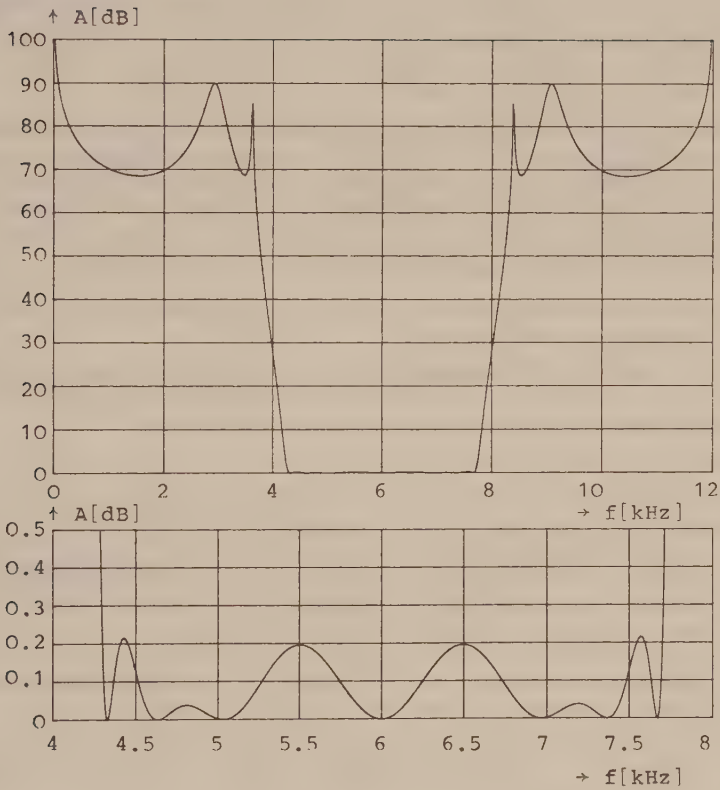


Bild 4.14 (d) Dämpfungsverläufe im Sperr- und im Durchlaßbereich mit den diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten.

5. Filterkatalog von bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten

5.1 Nützlichkeit des Filterkatalogs mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten

Die Berechnung der Wellendigitalfilter setzt eine gewisse Vertrautheit mit der klassischen Filtertheorie voraus. Außerdem ist die diskrete Optimierung der Multipliziererkoeffizienten ein wichtiger, aber schwieriger Schritt beim Entwurf von Digitalfiltern. Da diese Umstände für viele Anwender eine erhebliche Erschwernis darstellen, hat ein Filterkatalog mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten eine große Bedeutung.

Für einen solchen Filterkatalog soll eine Beschränkung auf Strukturen erfolgen, die möglichst einfach und modular sind, anderseits aber gestatten, einer großen Palette von in der Praxis auftretenden Filteranforderungen zu genügen. Solche Strukturen sind insbesondere bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter [13,16], deren Brückenzeile durch Kaskadierung von Allpaßgliedern aufgebaut sind. Eine Beschränkung auf bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter hat sich aus folgenden Gründen als sehr sinnvoll erwiesen:

1. Die Anzahl der Entwurfsparameter wird dadurch hinreichend reduziert, so daß eine sinnvolle Katalogisierung leicht möglich ist.

2. Für viele praktische Anwendungsfälle können die Systemanforderungen direkt oder durch eine gewisse Modifikation des Systemkonzepts sehr günstig durch den Einsatz von bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern erfüllt werden [16,17,88-94].

Für die Berechnung des Filterkatalogs wurde der im Abschnitt 4.3 beschriebene diskrete Optimierungsalgorithmus verwendet. Ausgehend von einem Toleranzschema für die Tiefpaßfilter können die im CSD-Code diskret optimierten Koeffizientenwerte von bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern ohne weitere Rechnung direkt aus dem Katalog entnommen werden. Die Benutzung des Filterkatalogs wird durch verschiedene Hilfsdiagramme erleichtert. Diese Diagramme enthalten die zu dem jeweils verschiedenen Realisierungsaufwand und Filtergrad ermittelten minimalen Dämpfungswerte im Sperrbereich in Abhängigkeit von der normierten Grenzfrequenz. Damit ist der Benutzer in der Lage, aus diesen Hilfsdiagrammen sofort den für die Erfüllung der Dämpfungsanforderungen notwendigen Realisierungsaufwand abzulesen. Dieser Katalog kann auch für den Entwurf der Hochpässe, Bandpässe und Bandsperren benutzt werden, falls die Grenzfrequenzen des jeweiligen Filters gewisse Voraussetzungen erfüllen. In diesem Kapitel werden wir die Beschreibung und die Benutzung des Filterkatalogs [29-30] mit einigen Beispielen erläutern.

5.2 Beschreibung des Filterkatalogs

Wir betrachten in Bild 5.1 ein bireziprokes Brücken-Wellendigitalfilter vom Grad N (notwendigerweise ungerade). Die Brückenzeile dieses Brücken-Wellendigitalfilters sind durch die Kaskadierung von Allpaßgliedern aufgebaut und das Filter enthält $(N - 1)/2$ Zweitoradaptoren und N Verzögerungselemente. Der Filterkatalog wird für das bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter in Bild 5.1 erstellt. Für jeden Grad N (von

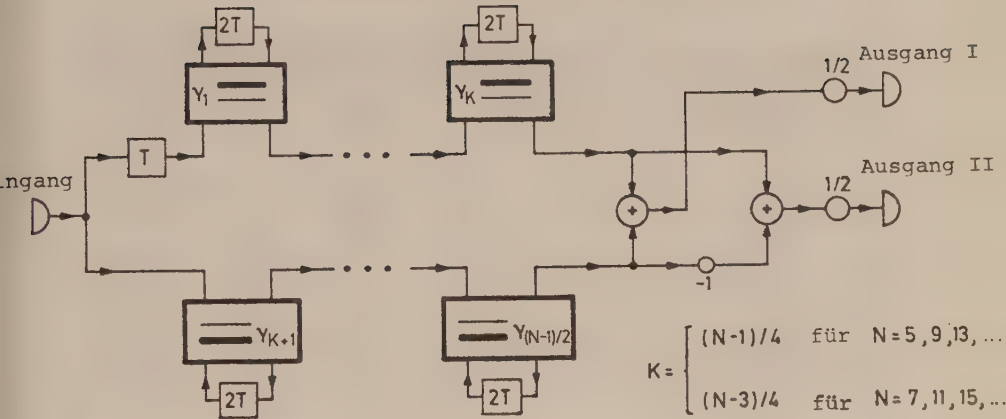


Bild 5.1 Wellenflußdiagramm eines bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters vom Grad N .

3 bis 15) des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters in Bild 5.1 wird eine Tabelle vorbereitet. Für die Erstellung des Filterkatalogs werden für die Ausgangslösungen nur die Cauerparameterfilter berechnet. Wir wollen nun den Katalog an Hand eines Ausschnittes der Tabelle für das bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter 7. Grades erläutern (Tabelle 5.1). Die Sperrgrenze f_s und die Durchlaßgrenze f_p des Tiefpasses werden in dem Katalog auf die Abtastfrequenz F normiert. Wegen der bireziproken Eigenschaft der charakteristischen Funktion $C(\psi)$ gilt gemäß (2.37)

$$f_p/F = 1/2 - f_s/F \quad (5.1)$$

In der ersten Spalte der Tabelle werden f_s/F bzw. f_p/F von 0.251 bzw. 0.249 bis zu einer maximalen normierten Sperrgrenze f_{smax}/F bzw. einer minimalen normierten Durchlaßgrenze f_{pmin}/F mit 1/1000 Schritten aufgetragen. Als f_{smax}/F bzw. f_{pmin}/F wird die größte bzw. kleinste Frequenz gewählt, für die die minimale Dämpfung im Sperrbereich mit idealen Multipliziererkoeffizienten für Cauerparameterfilter kleiner oder gleich 180 dB ist. In der zweiten Spalte werden die idealen Multipliziererkoeffizienten mit den zugehörigen minimalen Dämpfungswerten A_s [dB] im Sperrbereich aufgetragen. Die maximale Dämpfung A_p [dB] im Durchlaßbereich kann entweder mit Hilfe von (2.38) berechnet oder aus dem Hilfsdiagramm in Bild 5.2 direkt abgelesen werden. Zusätzlich wird ein Hilfsdiagramm in Bild 5.3 fertiggestellt. Dieses Hilfsdiagramm enthält die zu dem

TABELLE 5.1a

Ein Ausschnitt aus dem Filterkatalog für Tiefpaß 7. Grades

BIREZIPROKE BRÜCKEN-WELENDIGITALFILTER 7. GRADES							
		ANZAHL DER IMPLIZITTADDIERER					
	IDEAL	0	1	2	3	4	5
f_s/F	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$
f_p/F							
	71	71	71	71	71	71	71
	72	72	72	72	72	72	72
	73	73	73	73	73	73	73
.330	67.08	37.61	41.70	52.70	56.58	59.42	63.34
.170	.349923	1	2	1-3	1-3	1-3	1-3-5 8
	.094677	0-3	5	3-6	3-6-9	3-6-8	3-5
	.736101	3	0-2-4	0-2	0-2	0-2 8	0-2-6
.331	67.55	37.61	41.70	52.70	57.15	59.42	65.84
.169	.347937	1	2	1-3	1-3	1-3	1-3-5 8
	.093889	0-3	5	3-6	3-6-9	3-6-8	3-5
	.734623	3	0-2-4	0-2	0-2	0-2 8	0-2-6
.332	68.01	37.61	41.70	52.70	57.66	59.42	66.63
.168	.345984	1	2	1-3	1-3	1-3	1-3-5 8
	.093116	0-3	5	3-6	3-6-9	3-6-8	3-5
	.733167	3	0-2-4	0-2	0-2	0-2 8	0-2-6
.333	68.48	37.61	42.06	52.70	58.13	59.42	66.63
.167	.344063	1	1	1-3	1-3	1-3	1-3-5 8
	.092359	0-3	0-3	3-6	3-6-9	3-6-8	3-5
	.731731	3	3 7	0-2	0-2	0-2 8	0-2-6
.334	68.95	37.61	42.98	52.70	58.44	60.05	66.63
.166	.342172	1	1	1-3	1-3	2 4	1-3-5 8
	.091616	0-3	0-3	3-6	3-6-9	4 6	3-5
	.730307	3	3 7	0-2	0-2	0-2-5-7	0-2-6
.335	69.42	37.61	43.96	52.70	58.44	60.18	66.63
.165	.340313	1	1	1-3	1-3	2 4	1-3-5 8
	.090887	0-3	0-3	3-6	3-6-9	4 6	3-5
	.728905	3	3 7	0-2	0-2	0-2-5-7	0-2-6
.336	69.89	37.61	45.01	52.70	58.44	60.18	66.63
.164	.338483	1	1	1-3	1-3	2 4	1-3-5 8
	.090172	0-3	0-3	3-6	3-6-9	4 6	3-5
	.727520	3	3 7	0-2	0-2	0-2-5-7	0-2-6
.337	70.36	37.61	45.21	52.70	58.44	60.18	66.63
.163	.336682	1	1	1-3	1-3	2 4	1-3-5 8
	.089470	0-3	0-3	3-6	3-6-9	4 6	3-5
	.726151	3	3 7	0-2	0-2	0-2-5-7	0-2-6
.338	70.83	37.61	45.21	52.70	58.44	60.18	66.63
.162	.334909	1	1	1-3	1-3	2 4	1-3-5 8
	.088782	0-3	0-3	3-6	3-6-9	4 6	3-5
	.724797	3	3 7	0-2	0-2	0-2-5-7	0-2-6
.339	71.30	37.61	45.21	52.70	58.50	60.18	66.63
.161	.333165	1	1	1-3	2 5	2 4	1-3-5 8
	.088106	0-3	0-3	3-6	4	4 6	3-5
	.723462	3	3 7	0-2	0-2-4 8	0-2-5-7	0-2-6
.340	71.78	37.61	45.21	52.70	58.50	60.18	66.63
.160	.331447	1	1	1-3	2 5	2 4	1-3-5 8
	.087442	0-3	0-3	3-6	4	4 6	3-5
	.722141	3	3 7	0-2	0-2-4 8	0-2-5-7	0-2-6

TABELLE 5.1b

Ein Ausschnitt aus dem Filterkatalog für Tiefpaß 7. Grades

BIREZIPROKE BRÜCKEN-WELENDIGITALFILTER 7. GRADES					
ANZAHL DER IMPLIZITADDIERER					
	6	7	8	9	10
f_s/F	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$
f_p/F	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1
	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2
	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3
.330	63.46	65.04	65.40	65.70	66.62
.170	1-3-5 9	1-3-6-10	1-3-5 7	1-3-5 7-9 11	1-3-5 7-11
	3-5	3-5 8 11	3-5 9	3-5 10	3-5 9-11
	0-2-6-9	0-2-7	0-2-6 9 11	0-2-6 9	0-2-6 9 11
.331	65.84	65.99	66.70	66.70	66.70
.169	1-3-5 8	1-3-5 8-11	1-3-5 8-10	1-3-5 8-10	1-3-5 8-10
	3-5	3-5	3-5-11	3-5-11	3-5-11
	0-2-6	0-2-6-11	0-2-6-11	0-2-6-11	0-2-6-11
.332	66.63	66.88	66.88	66.88	66.88
.168	1-3-5 8	1-3-5 8-11	1-3-5 8-11	1-3-5 8-11	1-3-5 8-11
	3-5	3-5	3-5	3-5	3-5
	0-2-6	0-2-6-11	0-2-6-11	0-2-6-11	0-2-6-11
.333	66.63	66.88	67.84	67.84	67.84
.167	1-3-5 8	1-3-5 8-11	1-3-5	1-3-5	1-3-5
	3-5	3-5	3-5-9 11	3-5-9 11	3-5-9 11
	0-2-6	0-2-6-11	0-2-6-8 10	0-2-6-8 10	0-2-6-8 10
.334	66.63	66.88	68.28	68.28	68.28
.166	1-3-5 8	1-3-5 8-11	1-3-5	1-3-5	1-3-5
	3-5	3-5	3-5-9 11	3-5-9 11	3-5-9 11
	0-2-6	0-2-6-11	0-2-6-8 10	0-2-6-8 10	0-2-6-8 10
.335	66.63	66.88	68.28	68.28	68.28
.165	1-3-5 8	1-3-5 8-11	1-3-5	1-3-5	1-3-5
	3-5	3-5	3-5-9 11	3-5-9 11	3-5-9 11
	0-2-6	0-2-6-11	0-2-6-8 10	0-2-6-8 10	0-2-6-8 10
.336	66.63	66.88	68.28	68.59	68.59
.164	1-3-5 8	1-3-5 8-11	1-3-5	1-3-5-7 10	1-3-5-7 10
	3-5	3-5	3-5-9 11	3-5-8-11	3-5-8-11
	0-2-6	0-2-6-11	0-2-6-8 10	0-2-5 7	0-2-5 7
.337	66.63	66.88	68.28	69.75	69.75
.163	1-3-5 8	1-3-5 8-11	1-3-5	1-3-5-7 9-11	1-3-5-7 9-11
	3-5	3-5	3-5-9 11	3-5-8	3-5-8
	0-2-6	0-2-6-11	0-2-6-8 10	0-2-5 7	0-2-5 7
.338	67.02	67.02	68.61	69.75	69.75
.162	1-3-5	1-3-5	2 4 6 10	1-3-5-7 9-11	1-3-5-7 9-11
	3-5-10	3-5-10	3-5-7	3-5-8	3-5-8
	0-2-6-8	0-2-6-8	0-2-5 9 11	0-2-5 7	0-2-5 7
.339	67.02	67.83	68.61	69.75	69.75
.161	1-3-5	2 4 6-9	2 4 6 10	1-3-5-7 9-11	1-3-5-7 9-11
	3-5-10	3-5-7-10	3-5-7	3-5-8	3-5-8
	0-2-6-8	0-2-5	0-2-5 9 11	0-2-5 7	0-2-5 7
.340	67.80	69.35	69.35	69.75	70.12
.160	2 4 6-10	2 4 6-9	2 4 6-9	1-3-5-7 9-11	2 4 6 9 11
	3-5-7	3-5-7-10	3-5-7-10	3-5-8	3-5-7 10
	0-2-5	0-2-5	0-2-5	0-2-5 7	0-2-5 8-10

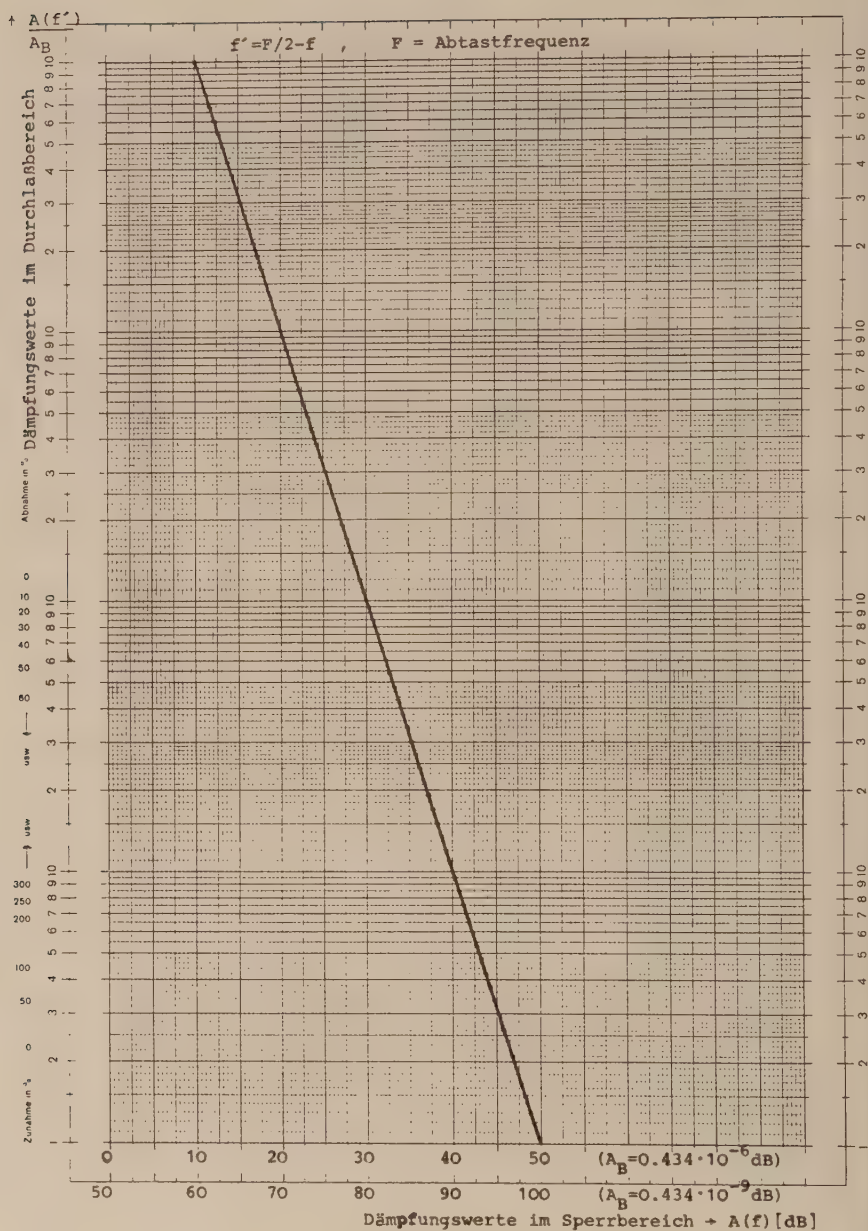


Bild 5.2 Hilfsdiagramm für die Beziehung zwischen der Sperrdämpfung $A(f)$ und der Durchlaßdämpfung $A(f')$ für bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter.

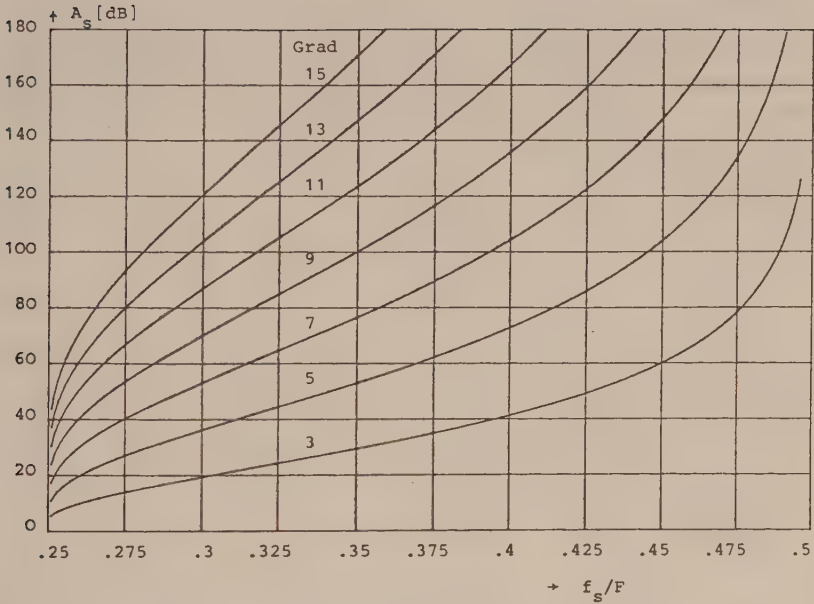


Bild 5.3 Die zu jedem Filtergrad ermittelten minimalen Dämpfungswerte A_s im Sperrbereich mit idealen Koeffizientenwerten in Abhängigkeit von der normierten Grenzfrequenz f_s/F .

verschiedenen Filtergrad N ermittelten minimalen Dämpfungswerte A_s [dB] im Sperrbereich mit idealen Koeffizientenwerten in Abhängigkeit von der normierten Sperrgrenze f_s/F . In den weiteren Spalten der Tabelle werden mit monoton steigendem Realisierungsmaß der Koeffizientenvektoren die diskret optimierten Koeffizientenvektoren $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{(N-1)/2})^T$ mit den zugehörigen minimalen Dämpfungswerten A_s [dB] im Sperrbereich aufgetragen. Als Realisierungsmaß der Koeffizienten wird das in (4.36) definierte Realisierungsmaß R_i mit $R_{si} = 0$ gewählt, d.h., als Realisierungsmaß wird nur die Anzahl der Implizitaddierer (implicit adders) R_{ai} in (4.37) für die diskrete Optimierung betrachtet. In die dritte Spalte der Tabelle werden die Werte der diskret optimierten Koeffizientenvektoren mit den zugehörigen minimalen Dämpfungswerten A_s [dB] im Sperrbe-

reich eingetragen, für die das Realisierungsmaß (Kostenfunktion) in (4.41) $K(\gamma) = 0$ ist. In der vierte Spalte werden die Werte der diskret optimierten Koeffizientenvektoren mit den zugehörigen minimalen Dämpfungswerten A_s [dB] im Sperrbereich eingetragen, für die das Realisierungsmaß $K(\gamma) = 1$ ist, usw. Die Koeffizienten werden mit Hilfe des im Abschnitt 4.3 beschriebenen diskreten Optimierungsalgorithmus optimiert. Wir haben für die Darstellung der Koeffizientenwerte in den Tabellen eine Umkodierung vorgenommen, um Platz zu sparen. Wir wollen nun an Hand eines Beispiels aus der Tabelle 5.1 die Werte interpretieren. Wir nehmen an, daß der Filtergrad $N = 7$, die normierte Sperrgrenze $f_s/F = 0.333$ und das Realisierungsmaß der Koeffizientenvektoren 5 ist. Aus Tabelle 5.1 entnehmen wir die folgenden Werte:

$$A_s = 66.63 \text{ dB} \quad , \quad (5.2a)$$

$$\gamma_1 : 1-3-5 \ 8 \quad , \quad (5.2b)$$

$$\gamma_2 : 3-5 \quad , \quad (5.2c)$$

$$\gamma_3 : 0-2-6 \quad . \quad (5.2d)$$

Für den 7. Grad, die normierte Sperrgrenze $f_s/F = 0.333$ und mit 5 Implizitaddierern ist die größtmögliche minimale Sperrdämpfung A_s gleich 66.63 dB. Die Koeffizientenwerte in (5.2b,c,d) werden wie folgt interpretiert:

$$\gamma_1 = 2^{-1} - 2^{-3} - 2^{-5} + 2^{-8} = 2^{-1}(1 + 2^{-3}(-1 + 2^{-2}(-1 + 2^{-3}))) \quad , \quad (5.3a)$$

$$\gamma_2 = 2^{-3} - 2^{-5} = 2^{-3}(1 - 2^{-2}) \quad , \quad (5.3b)$$

$$\gamma_3 = 2^0 - 2^{-2} - 2^{-6} = 1 + 2^{-2}(-1 - 2^{-4}) \quad . \quad (5.3c)$$

In die Tabellen werden für die Koeffizienten gemäß (4.34) die Beträge der Exponenten $\mu_{i,\nu}$ mit den Vorzeichen der zugehörigen Binärstellen $\delta_{i,\nu}$ eingetragen, d.h., die Koeffizienten γ_i , $i = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ in (4.34) werden im Katalog durch die Menge

$$M_{\gamma_i} = \{(\delta_{i,\nu} | \mu_{i,\nu}) \mid \nu = 1, 2, \dots, q\} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, (N-1)/2 \quad (5.4)$$

dargestellt, wobei die Kommas zwischen den Elementen der Menge M_{γ_i} weggelassen sind.

Wenn wir in (5.3) die Anzahl der Implizitaddierer für den Koeffizientenvektor betrachten, stellen wir fest, daß die Anzahl der Implizitaddierer nicht 5, sondern 6 ist. Das liegt daran, daß sich im Katalog die Koeffizientenwerte immer auf die in Bild 5.1 angegebenen Koeffizienten γ_i , $i = 1, 2, \dots, (N-1)/2$, beziehen. Diese Koeffizientenwerte liegen im Bereich

$$-1 < \gamma_i < 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, (N-1)/2 \quad . \quad (5.5)$$

Mit Hilfe von äquivalenten Adaptoren (Bild 2.6) können die Beträge aller Adaptorkoeffizienten auf 0.5 beschränkt werden. Wenn wir z.B. für den Adaptor mit dem Koeffizienten γ_3 in (5.3c) den äquivalenten Adaptor in Bild 2.6 benutzen, erhalten wir für den Koeffizienten

$$\gamma'_3 = 1 - \gamma_3 = 2^{-2}(1 + 2^{-4}) \quad . \quad (5.6)$$

Die Anzahl der Implizitaddierer für die Koeffizienten γ_1 , γ_2 und γ'_3 ist 5. Die im Katalog angegebene Anzahl der Implizitaddierer entspricht der Anzahl der Implizitaddierer, nachdem die Beträge der Koeffizienten, deren Beträge größer als 0.5 sind, unter Benutzung der äquivalenten Adaptoren in Bild 2.6 maximal auf 0.5 beschränkt wurden.

Für Tiefpaßfilter vom 3. und 5. Grad haben wir die diskret optimierten Koeffizientenvektoren ermittelt, für die $K(\gamma) \leq 5$ ist. Für die restlichen Filtergrade haben wir die diskret optimierten Koeffizientenvektoren ermittelt, für die $K(\gamma) \leq 10$ ist.

Die diskrete Optimierung hat zum Ziel, für jede normierte Sperrgrenze f_s/F (Zeile der Tabelle) und für jede Anzahl Implizitaddierer (Spalte der Tabelle) einen diskreten Koeffizientenvektor $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{(N-1)/2})^T$ zu ermitteln, welcher eine größere minimale Dämpfung A_s im Sperrbereich liefert als der Koeffizientenvektor, der

- bei gleicher Anzahl Implizitaddierer zu einer kleineren normierten Sperrgrenze f_s/F gehört, und als der Koeffizientenvektor, der
- bei gleicher normierter Sperrgrenze f_s/F zu einer kleineren Anzahl Implizitaddierer gehört.

Wenn eine solche Lösung gefunden wird, wird diese Lösung mit dem diskreten Koeffizientenvektor und dem zugehörigen minimalen Dämpfungswert A_s (dB) im Sperrbereich an die Stelle der Tabelle eingetragen, die durch die normierte Sperrgrenze f_s/F und durch die Anzahl Implizitaddierer lokalisiert ist. Falls bei einer normierten Sperrgrenze und bei einer Anzahl Implizitaddierer keine solche Lösung gefunden wird, dann wird an dieser Stelle die Lösung mit dem größten minimalen Dämpfungswert A_s (dB) im Sperrbereich als Optimum eingetragen, die entweder

- bei gleicher Anzahl Implizitaddierer zu einer kleineren normierten Sperrgrenze f_s/F oder
- bei gleicher normierter Sperrgrenze f_s/F zu einer kleineren Anzahl Implizitaddierer gehört.

Damit wird die minimale Dämpfung A_s (dB) im Sperrbereich für jede Spalte (oder Zeile) der Tabelle mit steigender normierter Sperrgrenze f_s/F (oder Anzahl Implizitaddierer) monoton steigen.

Einige Ausschnitte aus dem Filterkatalog werden in der Tabelle 5.2 für Grad 9, Tabelle 5.3 für Grad 11, Tabelle 5.4 für Grad 13 und Tabelle 5.5 für Grad 15 angegeben. Die Veröffentlichung der vollständigen Version des Filterkatalogs ist in Vorbereitung.

TABELLE 5.2a

Ein Ausschnitt aus dem Filterkatalog für Tiefpaß 9. Grades

BIREZIPROKE BRÜCKEN-WELENDIGITALFILTER 9. GRADES							
		ANZAHL DER IMPLIZITADDIERER					
	IDEAL	0	1	2	3	4	5
f_s/F	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$
f_p/F							
	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1
	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2
	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3
	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4
.282	58.55	27.27	35.68	40.57	45.02	49.83	55.65
.218	.351533	0-6	1-4	0-3	2	1-3	1-3-6
	.872456	2	0-4	2	0-3-5	0-3	0-3
	.105131	-5	0-2	5	4	3-8	3-6
	.622680	0-2	3	1 3-5	1 5 7	1 3 7	1 3 8
.283	59.23	28.34	35.68	41.13	45.02	49.83	55.65
.217	.346736	0-7	1-4	1-5	2	1-3	1-3-6
	.870030	2	0-4	0-4	0-3-5	0-3	0-3
	.103263	-5	0-2	0-2	4	3-8	3-6
	.617487	0-2	3	3 5	1 5 7	1 3 7	1 3 8
.284	59.90	28.91	35.68	42.59	45.02	49.83	55.65
.216	.342096	0-7	1-4	1-5	2	1-3	1-3-6
	.867647	2	0-4	0-4	0-3-5	0-3	0-3
	.101468	-5	0-2	0-2	4	3-8	3-6
	.612423	0-2	3	3 5	1 5 7	1 3 7	1 3 8
.285	60.57	29.02	35.68	44.14	45.88	49.83	55.65
.215	.337603	0-11	0-4	1-5	1-3	1-3	1-3-6
	.865306	2	1-4	0-4	0-3-7	0-3	0-3
	.099740	-6	0-2	0-2	3	3-8	3-6
	.607482	0-2	3	3 5	1 3	1 3 7	1 3 8
.286	61.22	29.95	35.68	44.71	45.88	49.83	55.65
.214	.333250	-6	0-4	0-4	1-3	1-3	1-3-6
	.863005	0-2	1-4	1-5	0-3-7	0-3	0-3
	.098077	2	0-2	0-2	3	0-8	3-6
	.602660	8	3	3 5	1 3	1 3 7	1 3 8
.287	61.88	30.31	36.95	44.71	48.19	49.83	55.65
.213	.329031	0-2	2	0-4	2	1-3	1-3-6
	.860744	7	0-2 4	1-5	0-3-5-7	0-3	0-3
	.096474	2	1	0-2	4	3-8	3-6
	.597951	5	4	3 5	1 5	1 3 7	1 3 8
.288	62.53	30.31	38.72	44.71	49.76	51.13	55.65
.212	.324938	0-2	2	0-4	2	2	1-3-6
	.858519	7	0-2 4	1-5	0-3-5-7	0-3-5-7	0-3
	.094928	2	1	0-2	4	4-11	3-6
	.593351	5	4	3 5	1 5	1 5	1 3 8
.289	63.17	30.31	40.35	44.71	49.76	51.13	55.65
.211	.320966	0-2	2	0-4	2	2	1-3-6
	.856332	7	0-2 4	1-5	0-3-5-7	0-3-5-7	0-3
	.093436	2	1	0-2	4	4-11	3-6
	.588855	5	4	3 5	1 5	1 5	1 3 8
.290	63.81	30.52	40.35	44.71	49.76	51.13	55.65
.210	.317108	0-6	2	0-4	2	2	1-3-6
	.854180	0-2	0-2 4	1-5	0-3-5-7	0-3-5-7	0-3
	.091995	0-10	1	0-2	4	4-11	3-6
	.584461	2	4	3 5	1 5	1 5	1 3 8

TABELLE 5.2b

Ein Ausschnitt aus dem Filterkatalog für Tiefpaß 9. Grades

BIRECIPROCAL LATTICE WAVE DIGITAL FILTER 9th DEGREE					
MAXIMAL NUMBER OF IMPLICIT ADDERS					
	6	7	8	9	10
f_s/F	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$
f_p/F	f_p/F	f_p/F	f_p/F	f_p/F	f_p/F
	71	71	71	71	71
	72	72	72	72	72
	73	73	73	73	73
	74	74	74	74	74
.282	55.72	56.94	56.94	57.20	58.04
.218	1-3-6	1-3-6-8	1-3-6-8	1-3-6-8 10	1-3-5 7 11
	0-3	0-3-9	0-3-9	0-3-10	0-3-9-11
	3-6-11	3-6-9	3-6-9	3-6-9	3-6-8
	1 3 8	1 3	1 3	1 3 9	1 3-9
.283	56.35	56.94	57.35	57.70	58.39
.217	1-3-6	1-3-6-8	1-3-5 7	1-3-5	1-3-5 9
	0-3-9	0-3-9	0-3-8	0-3-7 9	0-3-8-10
	3-6	3-6-9	3-6-8	3-5 7	3-5 7 10
	1 3 9	1 3	1 3-8	1 3-7-9	1 3-7
.284	56.35	56.94	57.90	58.45	58.76
.216	1-3-6	1-3-6-8	1-3-5 7	1-3-5	1-3-5-9-11
	0-3-9	0-3-9	0-3-8	0-3-7 9	0-3-7
	3-6	3-6-9	3-6-8	3-5 7	3-5 7
	1 3 9	1 3	1 3-8	1 3-7-9	1 3-6 9
.285	56.35	56.94	57.90	58.45	59.02
.215	1-3-6	1-3-6-8	1-3-5 7	1-3-5	1-3-5-8
	0-3-9	0-3-9	0-3-8	0-3-7 9	0-3-7-10
	3-6	3-6-9	3-6-8	3-5 7	3-5 7-11
	1 3 9	1 3	1 3-8	1 3-7-9	1 3-6
.286	56.35	56.94	58.58	58.94	59.78
.214	1-3-6	1-3-6-8	2 4 6-8	2 4 7 10	2 4 6-9
	0-3-9	0-3-9	0-3-6	0-3-6 11	0-3-6 9
	3-6	3-6-9	3-5 10	3-5-9	3-5 11
	1 3 9	1 3	1 3-5	1 3-5	1 3-5 8
.287	56.35	56.94	59.24	60.64	60.64
.213	1-3-6	1-3-6-8	2 4 6-8	2 4 6-9	2 4 6-9
	0-3-9	0-3-9	0-3-6	0-3-6	0-3-6
	3-6	3-6-9	3-5	3-5 9	3-5 9
	1 3 9	1 3	1 3-5 11	1 3-5 10	1 3-5 10
.288	56.35	56.94	59.24	60.71	61.53
.212	1-3-6	1-3-6-8	2 4 6-8	2 4 6	2 4 6-8
	0-3-9	0-3-9	0-3-6	0-3-6	0-3-6-10
	3-6	3-6-9	3-5	3-5 8-10	3-5 10
	1 3 9	1 3	1 3-5 11	1 3-5 9	1 3-5-10
.289	56.35	59.05	59.24	61.75	62.46
.211	1-3-6	2 4	2 4 6-8	2 4 6-9	2 4 7 9
	0-3-9	0-3-5 7	0-3-6	0-3-6-10	0-3-6-9
	3-6	3-5-9	3-5	3-5 9	3-5
	1 3 9	1 4 6	1 3-5 11	1 3-5	1 3-5-8 10
.290	56.35	59.05	59.39	61.75	62.46
.210	1-3-6	2 4	2 4	2 4 6-9	2 4 7 9
	0-3-9	0-3-5 7	0-3-5 7	0-3-6-10	0-3-6-9
	3-6	3-5-9	3-5-8	3-5 9	3-5
	1 3 9	1 4 6	1 4 6 10	1 3-5	1 3-5-8 10

TABELLE 5.3a

Ein Ausschnitt aus dem Filterkatalog für Tiefpaß 11. Grades

BIRECIPROCAL LATTICE WAVE DIGITAL FILTER 11th DEGREE							
MAXIMAL NUMBER OF IMPLICIT ADDERS							
	IDEAL	0	1	2	3	4	5
f_s/F f_p/F	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$
	γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 γ_5	γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 γ_5	γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 γ_5	γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 γ_5	γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 γ_5	γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 γ_5	γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 γ_5
.260 .240	50.74 .409221 .839492 .130363 .665625 .952563	26.88 0-2 2 0-4 5 1	32.13 2 0-2 6 4 1 0-4	35.48 1 0-3 3 5 0-2 0-5-7	39.35 1 0-3 6 2-4-6 0-2 0-5	42.13 1 0-3 6-10 2-4-6 0-2 0-5	43.78 1-5 0-3-7 3 5 0-2-5 0-5-7
.261 .239	52.08 .396323 .829956 .125012 .651804 .949158	26.88 0-2 2 0-4 5 1	34.46 3 0-2 5 -5 0-4 1	37.02 2 0-2 5 4 1 5 0-4	39.88 2-5 0-2 5 5 1 5 0-4	42.13 1 0-3 6-10 2-4-6 0-2 0-5	43.94 1-3 0-2 4 8 3 1 3 0-4 7
.262 .238	53.35 .384517 .820862 .120205 .638874 .945868	26.88 0-2 2 0-4 5 1	34.46 3 0-2 5 -5 0-4 1	37.02 2 0-2 5 4 1 5 0-4	42.20 2-5 0-2 5 5 1 5 0-4	42.20 2-5 0-2 5 5 1 5 0-4	44.43 1-3 0-2 4 8 3 1 3 0-4 7
.263 .237	54.57 .373640 .812164 .115850 .626723 .942679	26.88 0-2 2 0-4 5 1	34.46 3 0-2 5 -5 0-4 1	38.11 0-2 2 1 4 0-4-7-10	42.20 2-5 0-2 5 5 1 5 0-4	43.37 1-4 0-3 3 6 0-2-4 6 0-5	45.37 2 5 0-2 5 7 4 1 4 8 0-4
.264 .236	55.75 .363566 .803824 .111877 .615261 .939587	26.88 0-2 2 0-4 5 1	35.90 0-2 2 1 4 0-4-7	38.11 0-2 2 1 4 0-4-7-10	43.08 2-6 0-2 1 4 0-4-6 8	43.37 1-4 0-3 3 6 0-2-4 6 0-5	47.89 1-3 0-2 4-6 3 1 3-6 0-4
.265 .235	56.89 .354191 .795812 .108230 .604414 .936583	27.03 0-3 1 0-5 0-2 3	35.90 2 0-2 4 1 0-4-7	38.11 0-2 2 1 4 0-4-7-10	44.31 0-2 2 4 1 6 0-4-6 9	47.03 2 7 0-2 6 4 1 5 0-4-7	47.89 1-3 0-2 4-6 3 1 3-6 0-4
.266 .234	57.99 .345432 .788100 .104867 .594120 .933660	27.42 0-3 1 0-2 3 0-5	35.90 2 0-2 4 1 0-4-7	40.21 0-2 2 4 1 6 0-4-6	45.60 0-2 2 4 1 6 0-4-6 10	47.28 2 8 0-2 4 1 6 0-4-6 9	48.72 2 9 0-2 4 1 6 0-4-6 9-11

TABELLE 5.3b

Ein Ausschnitt aus dem Filterkatalog für Tiefpaß 11. Grades

BIRECIPROCAL LATTICE WAVE DIGITAL FILTER 11th DEGREE					
MAXIMAL NUMBER OF IMPLICIT ADDERS					
	6	7	8	9	10
f_s/F	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$
f_p/F	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1
	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2
	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3
	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4
	γ_5	γ_5	γ_5	γ_5	γ_5
.260	44.70	48.05	48.05	48.20	49.87
.240	1-5-8	1-4-7	1-4-7	1-4-7-10	1-3 5 7
	0-3	0-3-5	0-3-5	0-3-5	0-3-5-9
	3 5	3 6	3 6	3 6-10	3 7
	0-2-5 10	0-2-4-7	0-2-4-7	0-2-4-7	0-2-4-6-9
	0-5-8	0-4 6	0-4 6	0-4 6	0-4 6
.261	46.32	48.05	48.05	48.20	49.87
.239	1-3 7	1-4-7	1-4-7	1-4-7-10	1-3 5 7
	0-2 4	0-3-5	0-3-5	0-3-5	0-3-5-9
	3	3 6	3 6	3 6-10	3 7
	1 3	0-2-4-7	0-2-4-7	0-2-4-7	0-2-4-6-9
	0-4 7-10	0-4 6	0-4 6	0-4 6	0-4 6
.262	48.03	49.97	50.19	52.27	52.27
.238	1-3	1-3	1-3-8	1-3 9	1-3 9
	0-2 4	0-2 4-11	0-2 4 9	0-2 4 7-9	0-2 4 7-9
	3-8	3-7	3-7	3-7	3-7
	1 3	1 3	1 3	1 3 7	1 3 7
	0-4 7-9	0-4 7-9	0-4 7-10	0-4 7	0-4 7
.263	49.10	52.11	52.78	53.76	54.11
.237	1-3 7	1-3	1-3	1-3 11	1-3-10
	0-2 4-8	0-2 4-8 11	0-2 4	0-2 4-10	0-2 4
	3	3-7	3-7	3-7	3-7-10
	1 3	1 3	1 3 9	1 3 9	1 3 9
	0-4 8	0-4 8	0-4 7-9-11	0-4 8 10	0-4 7-9-11
.264	49.10	53.72	53.72	54.05	54.11
.236	1-3 7	1-3	1-3	1-3-11	1-3-10
	0-2 4-8	0-2 4-8	0-2 4-8	0-2 4-8	0-2 4
	3	3-7	3-7	3-7-11	3-7-10
	1 3	1 3	1 3	1 3	1 3 9
	0-4 8	0-4 8-11	0-4 8-11	0-4 8-11	0-4 7-9-11
.265	49.50	53.72	53.72	55.05	55.17
.235	1-3 6	1-3	1-3	1-3-6	1-3-6
	0-2 4-7	0-2 4-8	0-2 4-8	0-2 4-6 9	0-2 4-6 9
	3	3-7	3-7	3-6 10	3-6 9-11
	1 3 7	1 3	1 3	1 3-6	1 3-6
	0-4	0-4 8-11	0-4 8-11	0-4	0-4
.266	49.50	53.72	53.72	55.05	55.17
.234	1-3 6	1-3	1-3	1-3-6	1-3-6
	0-2 4-7	0-2 4-8	0-2 4-8	0-2 4-6 9	0-2 4-6 9
	3	3-7	3-7	3-6 10	3-6 9-11
	1 3 7	1 3	1 3	1 3-6	1 3-6
	0-4	0-4 8-11	0-4 8-11	0-4	0-4

TABELLE 5.4a

Ein Ausschnitt aus dem Filterkatalog für Tiefpaß 13. Grades

BIRECIPROCAL LATTICE WAVE DIGITAL FILTER 13th DEGREE							
MAXIMAL NUMBER OF IMPLICIT ADDERS							
	IDEAL	0	1	2	3	4	5
f_s/F	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$
f_p/F							
	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1
	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2
	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3
	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4
	γ_5	γ_5	γ_5	γ_5	γ_5	γ_5	γ_5
	γ_6	γ_6	γ_6	γ_6	γ_6	γ_6	γ_6
.251	37.13	19.58	23.97	26.43	29.18	31.89	31.89
.249	.575740	5	1	0-2-4-6	1	1 3	1 3
	.927975	0-3	0-3 5	0-4	0-3 5	0-4	0-4
	.993521	0-7	0-7	0-7	0-7 11	0-7 9	0-7 9
	.211111	7	3	2	2-4	2	2
	.816116	1	0-2	0-3	0-2	0-3-5	0-3-5
	.973886	0-5	0-5	0-5	0-5	0-5 7	0-5 7
.252	42.32	24.12	26.23	30.61	30.79	33.59	33.59
.248	.503823	0-3	1	1-5	1	1	1
	.892289	1	0-3	0-3 5	0-3	0-3 7	0-3 7
	.988554	0-6	0-6	0-7	0-6 9	0-6 8	0-6 8
	.173395	0-2	3	3	2-4	3 5	3 5
	.755993	3	0-2 6	0-2	0-2	0-2	0-2
	.956773	0-4	0-4	0-5	0-4 7	0-4 6	0-4 6
.253	45.98	24.12	28.33	35.23	36.89	39.13	39.13
.247	.459049	0-3	3	1	1	1-4	1-4
	.864462	1	0-2 4	0-3	0-3	0-3-9	0-3-9
	.984145	0-6	0-6	0-6	0-6	0-6	0-6
	.152347	0-2	7	3 5	2-4	3	3
	.713789	3	1	0-2	0-2-6	0-2-5	0-2-5
	.942300	0-4	0-4	0-4 7	0-4 7	0-4 7	0-4 7
.254	48.93	24.42	28.33	35.23	37.82	39.80	39.80
.246	.426342	3	3	1	1	1 6	1 6
	.840988	0-2	0-2 4	0-3	0-3	0-3	0-3
	.980096	0-5	0-6	0-6	0-6-8	0-6-8	0-6-8
	.137958	6	7	3 5	3 5 7	2-4-9	2-4-9
	.680530	1	1	0-2	0-2	0-2	0-2
	.929429	0-3	0-4	0-4 7	0-4	0-4	0-4
.255	51.46	24.42	31.04	35.23	37.82	39.80	39.80
.245	.400569	3	2	1	1	1 6	1 6
	.820418	0-2	0-2	0-3	0-3	0-3	0-3
	.976312	0-5	0-5	0-6	0-6-8	0-6-8	0-6-8
	.127142	6	1	3 5	3 5 7	2-4-9	2-4-9
	.652826	1	4	0-2	0-2	0-2	0-2
	.917695	0-3	0-3 6	0-4 7	0-4	0-4	0-4
.256	53.71	25.02	31.04	39.06	41.29	43.33	43.33
.244	.379329	0-6	2	2	2	2-8	2-8
	.801980	1	0-2	0-2	0-2	0-2	0-2
	.972739	0-3	0-5	0-5	0-5 11	0-5 10	0-5 10
	.118546	0-2	1	4	4	4	4
	.628977	3	4	1 6	1 6	1 6	1 6
	.906838	0-4	0-3 6	0-3 6	0-3 6	0-3 6	0-3 6

TABELLE 5.4b

Ein Ausschnitt aus dem Filterkatalog für Tiefpaß 13. Grades

BIRECIPROCAL LATTICE WAVE DIGITAL FILTER 13th DEGREE					
MAXIMAL NUMBER OF IMPLICIT ADDERS					
	6	7	8	9	10
f_s/F	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$
f_p/F					
	71	71	71	71	71
	72	72	72	72	72
	73	73	73	73	73
	74	74	74	74	74
	75	75	75	75	75
	76	76	76	76	76
.251	31.89	32.07	33.74	34.42	34.42
.249	1 3	1 4	1 4	1 4 6	1 4 6
	0-4	0-4-7-9	0-4-7-9	0-4-7-9	0-4-7-9
	0-7 9	0-7 10	0-7 10	0-7 10	0-7 10
	2	2-5	2-5-7	2-5	2-5
	0-3-5	0-2 4	0-2 4	0-2 4 8	0-2 4 8
	0-5 7	0-5 8	0-5 8	0-5 8	0-5 8
.252	35.26	39.42	40.34	40.34	40.34
.248	1	1	1	1	1
	0-3 6 9	0-3 6	0-3 6	0-3 6	0-3 6
	0-6 8	0-6 8 11	0-6 8 11	0-6 8 11	0-6 8 11
	2-4	2-4-6	2-4-6 8	2-4-6 8	2-4-6 8
	0-2	0-2	0-2	0-2	0-2
	0-4 6 8	0-4 6 8	0-4 6 8	0-4 6 8	0-4 6 8
.253	39.13	41.60	42.87	42.87	43.32
.247	1-4	1-5	1-5	1-5	1-5-7
	0-3-9	0-3-7-9	0-3-6 8 10	0-3-6 8 10	0-3-7-9
	0-6	0-6-11	0-6-11	0-6-11	0-6
	3	3 5	3 5	3 5	3 5
	0-2-5	0-2-5	0-2-5	0-2-5	0-2-5-8
	0-4 7	0-4 8	0-4 8	0-4 8	0-4 7-9-11
.254	39.80	43.27	43.27	44.02	45.52
.246	1 6	1-4	1-4	1-4	1-4
	0-3	0-3-5-9	0-3-5-9	0-3-5-9	0-3-5
	0-6-8	0-6-8	0-6-8	0-6-8	0-6-8-11
	2-4-9	3 6	3 6	3 6 9-11	3 5-7-9-11
	0-2	0-2-4	0-2-4	0-2-4	0-2-4
	0-4	0-4-7	0-4-7	0-4-7	0-4-7
.255	42.41	43.27	43.27	44.02	45.52
.245	1-3	1-4	1-4	1-4	1-4
	0-2 4	0-3-5-9	0-3-5-9	0-3-5-9	0-3-5
	0-5 7	0-6-8	0-6-8	0-6-8	0-6-8-11
	3	3 6	3 6	3 6 9-11	3 5-7-9-11
	1 3	0-2-4	0-2-4	0-2-4	0-2-4
	0-4-6-8	0-4-7	0-4-7	0-4-7	0-4-7
.256	43.33	43.33	43.68	45.63	48.39
.244	2-8	2-8	1-3	1-3	1-3
	0-2	0-2	0-2 4-7	0-2 4-7-9	0-2 4-7
	0-5 10	0-5 10	0-5 8	0-5 8	0-5 8
	4	4	3	3-7	3-7
	1 6	1 6	1 3	1 3 8	1 3 8
	0-3 6	0-3 6	0-3 5 9-11	0-3 5	0-3 5 9-11

TABELLE 5.5a

Ein Ausschnitt aus dem Filterkatalog für Tiefpaß 15. Grades

BIRECIPROCAL LATTICE WAVE DIGITAL FILTER 15th DEGREE							
		MAXIMAL NUMBER OF IMPLICIT ADDERS					
	IDEAL	0	1	2	3	4	5
f_s/F	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$	$A_s[dB]$
f_p/F							
	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1	γ_1
	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2	γ_2
	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3	γ_3
	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4	γ_4
	γ_5	γ_5	γ_5	γ_5	γ_5	γ_5	γ_5
	γ_6	γ_6	γ_6	γ_6	γ_6	γ_6	γ_6
	γ_7	γ_7	γ_7	γ_7	γ_7	γ_7	γ_7
.255	60.31	27.09	31.85	38.26	46.91	48.38	48.86
.245	.324212	0-9	3	2	2	2-10	2
	.741633	1	1	0-2	0-2-5	0-2-5	0-2-5 11
	.931542	0-3	0-3 6	0-4 7	0-4	0-4	0-4
	.097601	0-8	2	4	4	4	4 8
	.561100	3	4	1 5	1	1	1
	.859089	0-2	0-2	0-3	0-3-6	0-3-6	0-3-6
	.979554	0-5	0-5	0-6	0-6-9	0-6-9	0-6-9
.256	62.90	27.09	37.39	38.26	46.91	49.29	49.69
.244	.305614	0-9	6	2	2	2	2 8
	.719723	1	1	0-2	0-2-5	0-2-5	0-2-5
	.922184	0-3	0-3 6	0-4 7	0-4	0-4	0-4
	.090862	0-8	3	4	4	4 9	4 7
	.536975	3	4	1 5	1	1	1
	.843138	0-2	0-2	0-3	0-3-6	0-3-6	0-3-6
	.976455	0-5	0-5	0-6	0-6-9	0-6-9	0-6-9
.257	65.26	27.83	37.39	40.49	46.91	49.29	49.69
.243	.289962	0-4	6	4	2	2	2 8
	.700123	0-2	1	1 6	0-2-5	0-2-5	0-2-5
	.913401	2	0-3 6	0-3 6	0-4	0-4	0-4
	.085321	0-3	3	8	4	4 9	4 7
	.516048	4	4	2	1	1	1
	.828477	1	0-2	0-2	0-3-6	0-3-6	0-3-6
	.973505	0-6	0-5	0-5	0-6-9	0-6-9	0-6-9
.258	67.43	29.04	37.39	40.49	46.91	49.29	49.69
.242	.276484	0-4	6	4	2	2	2 8
	.682353	2	1	1 6	0-2-5	0-2-5	0-2-5
	.905100	0-2	0-3 6	0-3 6	0-4	0-4	0-4
	.080641	1	3	8	4	4 9	4 7
	.497562	4	4	2	1	1	1
	.814873	0-3	0-2	0-2	0-3-6	0-3-6	0-3-6
	.970682	0-6	0-5	0-5	0-6-9	0-6-9	0-6-9
.259	69.47	30.17	37.39	41.80	46.91	49.29	49.69
.241	.264676	0-2	6	4	2	2	2 8
	.666076	2	1	1 5	0-2-5	0-2-5	0-2-5
	.897214	0-4	0-3 6	0-3	0-4	0-4	0-4
	.076607	0-6	3	8	4	4 9	4 7
	.481010	1	4	2	1	1	1
	.802157	4	0-2	0-2	0-3-6	0-3-6	0-3-6
	.967973	0-3	0-5	0-5-7	0-6-9	0-6-9	0-6-9

TABELLE 5.5b

Ein Ausschnitt aus dem Filterkatalog für Tiefpaß 15. Grades

BIRECIPROCAL LATTICE WAVE DIGITAL FILTER 15th DEGREE					
	MAXIMAL NUMBER OF IMPLICIT ADDERS				
	6	7	8	9	10
f_s/F f_p/F	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$	$A_s[dB]$ $A_p[dB]$
	71 72 73 74 75 76 77	71 72 73 74 75 76 77	71 72 73 74 75 76 77	71 72 73 74 75 76 77	71 72 73 74 75 76 77
.255 .245	48.93 2 0-2-5 10 0-4 4 9 1 9 0-3-6 0-6-9	49.03 1-3 7 0-2 5 0-4 3-8 1 3 0-3 0-6-8 10	49.03 1-3 7 0-2 5 0-4 3-8 1 3 0-3 0-6-8 10	51.27 2 4 7 0-2-7 0-4-8-11 3-5 1 4 0-3-6 0-6-8	51.27 2 4 7 0-2-7 0-4-8-11 3-5 1 4 0-3-6 0-6-8
.256 .244	50.76 2 0-2-5-7 0-4-6 4 1 0-3-5 0-5 7-11	50.93 2 0-2-5-7 0-4-6 10 4 1 0-3-5 11 0-5 7	53.49 2 0-2-5-7 0-4-7-9 4 1 0-3-5 8 0-5 7 9	54.00 2 4 0-2-5 0-4-6 10 3-5 1 5 7 0-3-5 0-5 7	54.30 2 4-8 0-2-5 0-4-6 3-5 1 5 8 0-3-5 0-5 7-11
.257 .243	50.76 2 0-2-5-7 0-4-6 4 1 0-3-5 0-5 7-11	50.93 2 0-2-5-7 0-4-6 10 4 1 0-3-5 11 0-5 7	53.49 2 0-2-5-7 0-4-7-9 4 1 0-3-5 8 0-5 7 9	54.00 2 4 0-2-5 0-4-6 10 3-5 1 5 7 0-3-5 0-5 7	54.30 2 4-8 0-2-5 0-4-6 3-5 1 5 8 0-3-5 0-5 7-11
.258 .242	50.76 2 0-2-5-7 0-4-6 4 1 0-3-5 0-5 7-11	52.21 2 7 0-2-4 0-3 5-7 9 4 10 1 0-2 4 0-5	55.39 2 6 0-2-4-10 0-3 5-7 9 4 7 1 0-2 4 0-5	55.51 2 6 0-2-4-10 0-3 5-9 4 7 1 0-2 4 9 0-5 9	56.44 2 5-8 0-2-4-7 0-3 5-9 11 4 6 1 0-2 4 0-5 9
.259 .241	52.01 2 0-2-4 0-3 5-7 4 1-7 0-2 4 0-5-10	53.80 2 0-2-4 0-3 5-7 4 1-7 11 0-2 4 0-5-10	56.55 2 0-2-4-7 0-3 5-8-10 4 9 1-6 0-2 4 0-5	56.60 2 6 0-2-4 0-3 5-7 11 4 7 10 1 0-2 4 0-5-10	56.60 2 6 0-2-4 0-3 5-7 11 4 7 10 1 0-2 4 0-5-10

Zusätzlich haben wir für die Erleichterung der Benutzung des Filterkatalogs verschiedene Hilfsdiagramme vorbereitet. Diese Hilfsdiagramme enthalten die zu der jeweils unterschiedlichen Anzahl der Implizitaddierer und den unterschiedlichen Filtergraden ermittelten minimalen Dämpfungswerte A_s (dB) im Sperrbereich in Abhängigkeit von der normierten Sperrgrenze f_s/F . Bevor der Benutzer in den Tabellen die diskret optimierten Koeffizientenvektoren sucht, kann er aus diesen Hilfsdiagrammen sofort den für die Erfüllung der Dämpfungsanforderungen notwendigen Realisierungsaufwand ablesen. Bild 5.4, 5.5 und 5.6 zeigen die mit 0, 4 und 5 Implizitaddierern ermittelten minimalen Dämpfungswerte A_s (dB) im Sperrbereich in Abhängigkeit von der normierten Sperrgrenze f_s/F .

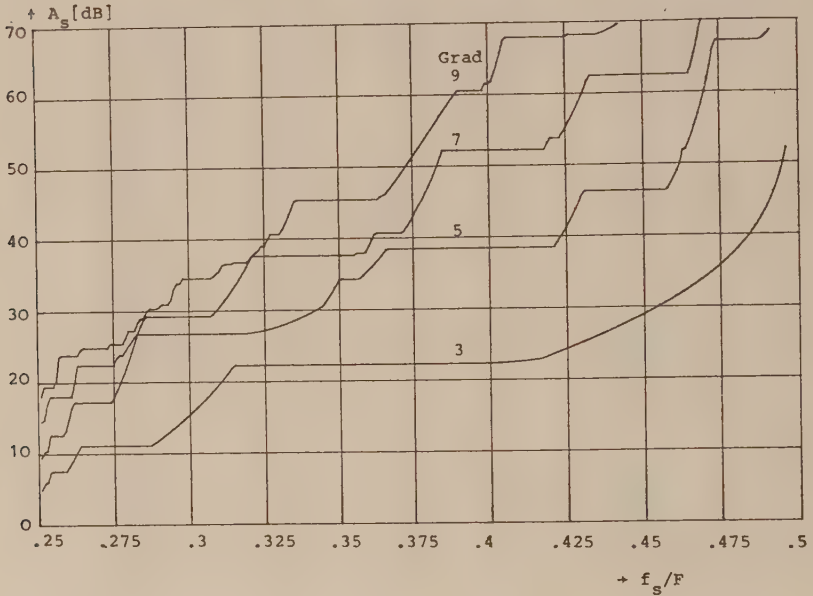


Bild 5.4 Die zu den Filtergraden 3, 5, 7, 9 ermittelten minimalen Dämpfungswerte A_s im Sperrbereich mit $K(\gamma) = 0$ in Abhängigkeit von der normierten Grenzfrequenz f_s/F .

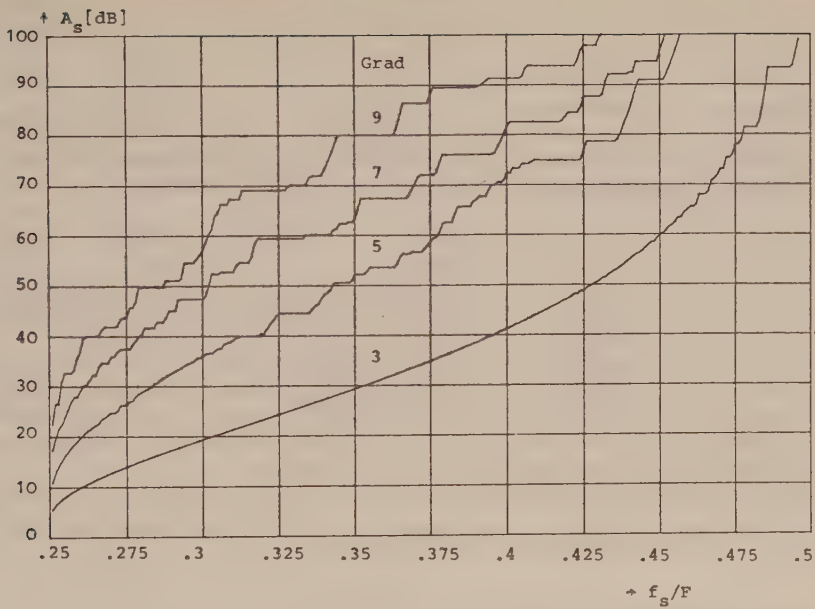


Bild 5.5 Die zu den Filtergraden 3, 5, 7, 9 ermittelten minimalen Dämpfungswerte A_s im Sperrbereich mit $K(\gamma) = 4$ in Abhängigkeit von der normierten Grenzfrequenz f_s/F .

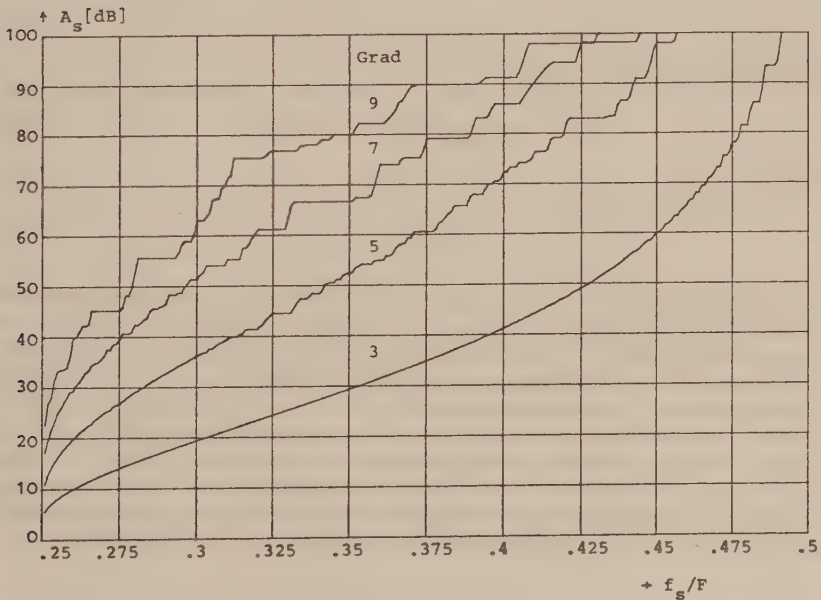


Bild 5.6 Die zu den Filtergraden 3, 5, 7, 9 ermittelten minimalen Dämpfungswerte A_s im Sperrbereich mit $K(\gamma) = 5$ in Abhängigkeit von der normierten Grenzfrequenz f_s/F .

5.3 Benutzung des Filterkatalogs

5.3.1 Tiefpässe

Die Dämpfungsanforderungen eines Tiefpasses sind in Bild 5.7 angegeben:

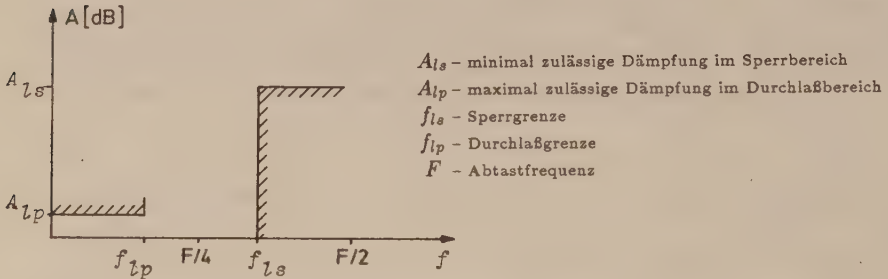


Bild 5.7 Dämpfungsanforderungen eines Tiefpasses.

Falls die Durchlaßgrenze f_{lp} und die Sperrgrenze f_{ls} die folgende Bedingung

$$0 < f_{lp} < F/4 < f_{ls} < F/2 \quad (5.5)$$

erfüllen, kann dieser Tiefpaß mit Hilfe des Filterkatalogs entworfen werden. Mit Hilfe vom Hilfsparameter

$$A'_{ls} = -10 \log(1 - 10^{-A_{lp}/10}) \quad (5.6)$$

wird der Tiefpaß mit der Sperrgrenze

$$f_{sz}/F = \min\{f_{ls}/F, (1/2 - f_{lp}/F)\} \quad (5.7)$$

und mit der minimalen Dämpfung im Sperrbereich

$$A_{sz} = \max\{A_{ls}, A'_{ls}\} \quad (5.8)$$

direkt aus dem Katalog entworfen. A'_{ls} kann auch ohne Berechnung direkt aus dem Hilfsdiagramm in Bild 5.2 abgelesen werden. Mit Hilfe des Hilfsdiagramms in Bild 5.3 wird zunächst der notwendige Grad des Filters mit den idealen Koeffizientenwerten abgelesen. Mit Hilfe von anderen Hilfsdiagrammen wie z.B. in Bildern 5.4, 5.5 und 5.6 kann der Realisierungsaufwand sofort abgelesen werden. Nach der Bestimmung des Grades und der Anzahl Implizitaddierer werden wir aus der zugehörigen Tabelle sofort den diskret optimierten Koeffizientenvektor und den minimalen Dämpfungswert A_s (dB) im Sperrbereich ablesen. Der maximal erreichbare Dämpfungswert A_p im Durchlaßbereich kann direkt aus dem Hilfsdiagramm in Bild 5.2 abgelesen werden. Die im Katalog angegebenen Dämpfungswerte gelten für die Übertragung vom Eingang zum Ausgang I (Bild 5.1).

Beispiel für den Entwurf der Tiefpässe

Die Dämpfungsanforderungen eines Tiefpasses sind gemäß Bild 5.7 wie folgt angegeben:

$$\begin{aligned} A_{lp} &= 0.001 \text{ dB} , & A_{ls} &= 55 \text{ dB} , \\ f_{lp} &= 3.4 \text{ kHz} , & f_{ls} &= 4.6 \text{ kHz} , & F &= 16 \text{ kHz} . \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (5.7) und (5.8) können wir die normierte Sperrgrenze des Tiefpasses $f_{sz}/F = 0.287$ und die minimal zulässige Dämpfung im Sperrbereich $A_{sz} = 55 \text{ dB}$ bestimmen. Aus dem Hilfsdiagramm in Bild 5.3 wird für den notwendigen Grad des Filters mit idealen Multiplizierkoeffizienten der Wert $N = 9$ abgelesen. Mit Hilfe von Hilfsdiagrammen wie z.B. Bilder 5.4, 5.5 und 5.6 kann der Realisierungsaufwand (Anzahl der Implizitaddierer) des Koeffizientenvektors $K(\gamma) = 5$ abgelesen werden. Mit $N = 9$, $K(\gamma) = 5$ und $f_{sz}/F = 0.287$ können wir aus dem Filterkatalog die diskret optimierten Koeffizientenwerte mit dem zugehörigen minimalen Dämpfungswert im Sperrbereich wie folgt ablesen (Tabelle 5.2):

$$A_s = 55.65 \text{ dB}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: 1-3-6 & \gamma_1 &= 2^{-1} - 2^{-3} - 2^{-6} \\ \gamma_2 &: 0-3 & \gamma_2 &= 2^0 - 2^{-3} \quad (\gamma'_2 = 1 - \gamma_2 = 2^{-3}) \\ \gamma_3 &: 3-6 & \gamma_3 &= 2^{-3} - 2^{-6} \\ \gamma_4 &: 1 \ 3 \ 8 & \gamma_4 &= 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-8} \quad (\gamma'_4 = 1 - \gamma_4 = 2^{-1} - 2^{-3} - 2^{-8}) \end{aligned}$$

Für die Adaptoren mit den Koeffizienten γ_2 und γ_4 werden die äquivalenten Adaptoren (Bild 2.6) mit den Koeffizienten γ'_2 und γ'_4 benutzt. Das Wellenflußdiagramm und der Dämpfungsverlauf des Tiefpasses werden in Bild 5.8 gezeichnet. Da jeder Adaptor 3 Addierer (explicit adders) enthält, werden insgesamt 18 Addierer benötigt, um dieses Tiefpaß zu realisieren.

5.3.2 Hochpässe

Die Dämpfungsanforderungen eines Hochpasses sind in Bild 5.9 angegeben:

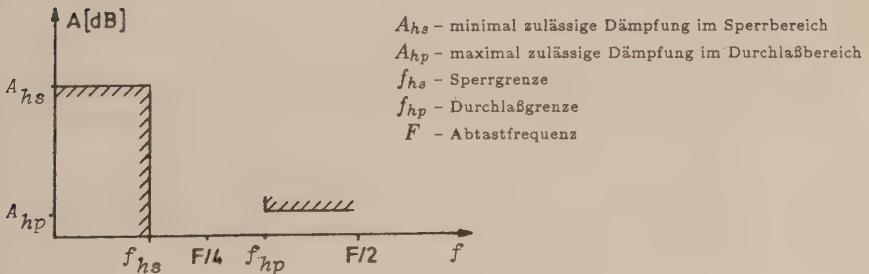


Bild 5.9 Dämpfungsanforderungen eines Hochpasses.

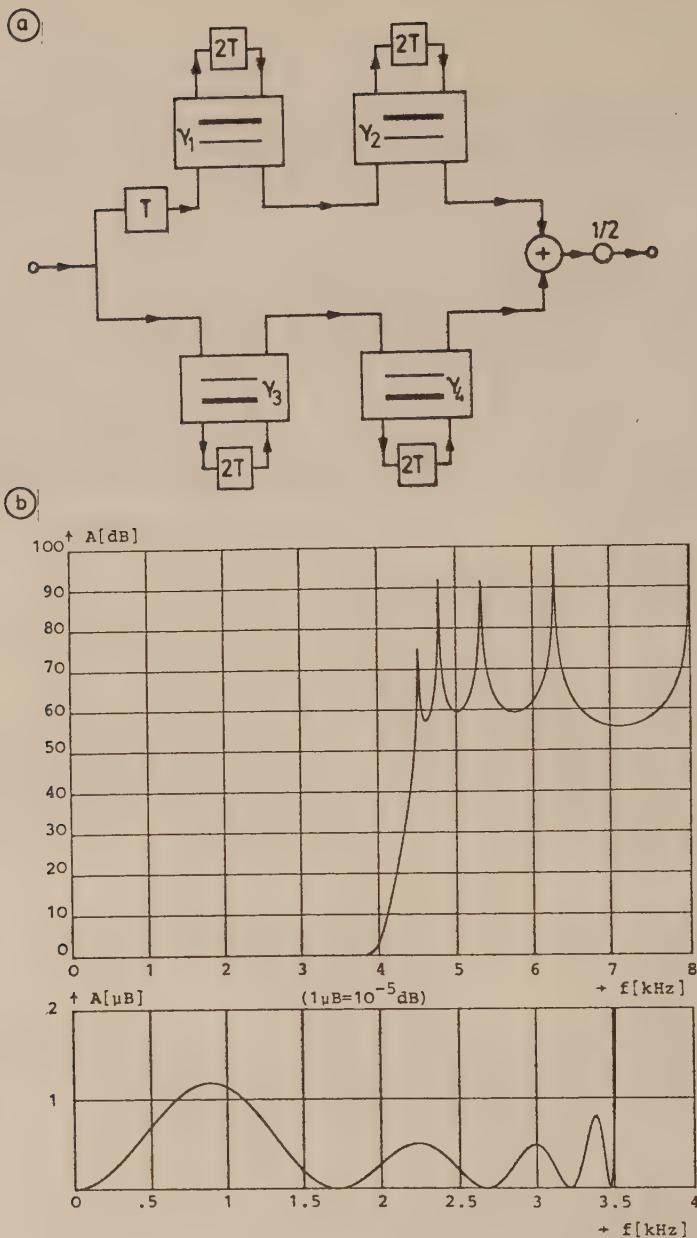


Bild 5.8 (a) Wellenflußdiagramm des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters, Tiefpaß 9. Grades, (b) Dämpfungsverläufe im Sperr- und im Durchlaßbereich mit den diskret optimierten Koeffizientenwerten aus dem Katalog.

Falls die Durchlaßgrenze f_{hp} und die Sperrgrenze f_{hs} des Hochpasses die folgende Bedingung

$$0 < f_{hs} < F/4 < f_{hp} < F/2 \quad (5.11)$$

erfüllen, dann kann dieses Hochpaß mit Hilfe des Filterkatalogs entworfen werden. Die Dämpfungsanforderungen des Hochpasses können mit Hilfe von Tiefpaß-Hochpaß-Transformation (3.23) auf die Dämpfungsanforderungen eines Tiefpasses mit der normierten Sperrgrenze

$$f_{sx}/F = \min\{f_{hp}/F, (1/2 - f_{hs}/F)\} \quad (5.12)$$

und der minimalen Dämpfung im Sperrbereich

$$A_{sx} = \max\{A_{hs}, A'_{hs}\} \quad (5.13)$$

zurückgeführt werden, wobei A'_{hs} entweder durch

$$A'_{hs} = -10 \log(1 - 10^{-A_{hp}/10}) \quad (5.14)$$

berechnet oder aus dem Hilfsdiagramm in Bild 5.2 direkt abgelesen werden. Der Entwurf des Tiefpasses wird in Abschnitt 5.3.1 erläutert. Wegen der Tiefpaß-Hochpaß-Transformation entspricht die Übertragungsfunktion des Hochpasses der Übertragung vom Eingang zum Ausgang II.

Beispiel für den Entwurf der Hochpässe

Die Dämpfungsanforderungen eines Hochpasses sind gemäß Bild 5.9 wie folgt angegeben:

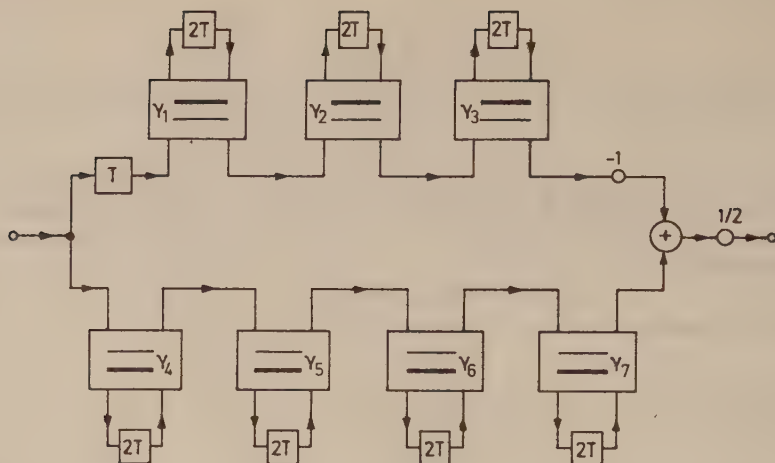
$$\begin{aligned} A_{hp} &= 0.001 \text{ dB} \quad , \quad A_{hs} = 50 \text{ dB} \\ f_{hp} &= 33 \text{ kHz} \quad , \quad f_{hs} = 31 \text{ kHz} \quad , \quad F = 128 \text{ kHz} \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (5.12) und (5.13) können wir die normierte Sperrgrenze des Tiefpasses $f_{sx}/F = 0.257$ und die minimal zulässige Dämpfung im Sperrbereich $A_{sx} = 50 \text{ dB}$ bestimmen. Aus den Hilfsdiagrammen kann die Anzahl der notwendigen Implizitaddierer $K(\gamma) = 6$ für den Filtergrad $N = 15$ abgelesen werden. Mit $N = 15$, $K(\gamma) = 6$ und $f_{sx}/F = 0.257$ können wir aus dem Katalog die Koeffizientenwerte mit dem zugehörigen minimalen Dämpfungswert im Sperrbereich wie folgt ablesen (Tabelle 5.5):

$$A_s = 50.76 \text{ dB}$$

$\gamma_1 : 2$	$\gamma_1 = 2^{-2}$
$\gamma_2 : 0.2-5.7$	$\gamma_2 = 2^0 - 2^{-2} - 2^{-5} - 2^{-7} \quad , \quad (\gamma'_2 = 1 - \gamma_2 = 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-7})$
$\gamma_3 : 0.4-6$	$\gamma_3 = 2^0 - 2^{-4} - 2^{-6} \quad , \quad (\gamma'_3 = 1 - \gamma_3 = 2^{-4} + 2^{-6})$
$\gamma_4 : 4$	$\gamma_4 = 2^{-4}$
$\gamma_5 : 1$	$\gamma_5 = 2^{-1}$
$\gamma_6 : 0.3-5$	$\gamma_6 = 2^0 - 2^{-3} - 2^{-5} \quad , \quad (\gamma'_6 = 1 - \gamma_6 = 2^{-3} + 2^{-5})$
$\gamma_7 : 0.5-7.11$	$\gamma_7 = 2^0 - 2^{-5} + 2^{-7} - 2^{-11} \quad , \quad (\gamma'_7 = 1 - \gamma_7 = 2^{-5} - 2^{-7} + 2^{-11})$

a



b

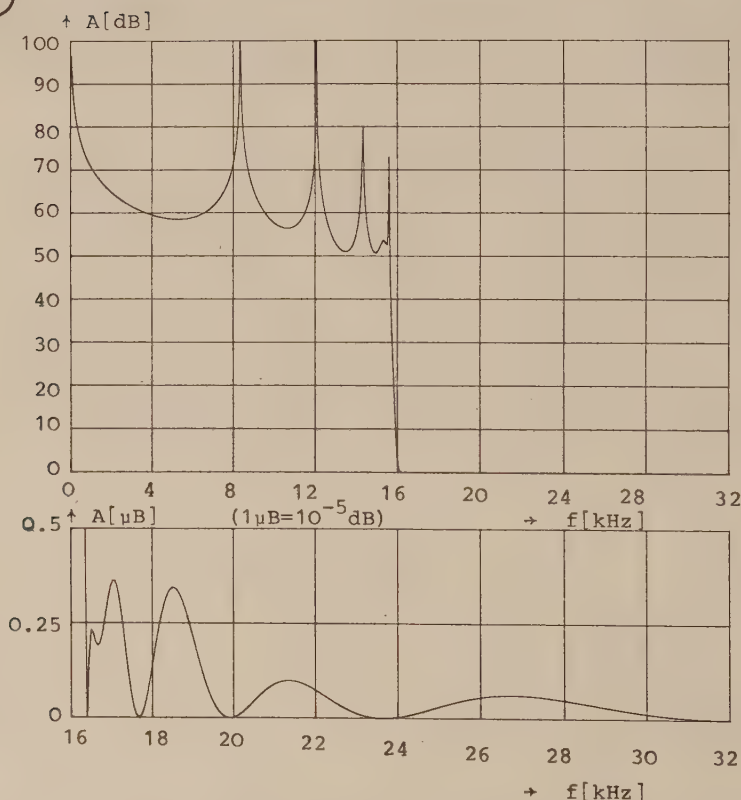


Bild 5.10 (a) Wellenflußdiagramm des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters, Hochpaß 15. Grades, (b) Dämpfungsverläufe im Sperr- und im Durchlaßbereich mit diskret optimierten Koeffizientenwerten aus dem Katalog.

Für die Adaptoren mit den Koeffizienten $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_6$ und γ_7 werden die äquivalenten Adaptoren (Bild 2.6) mit den Koeffizienten $\gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_6$ und γ'_7 benutzt. Das Wellenflußdiagramm und die Dämpfungsverläufe im Sperr- und Durchlaßbereich des Hochpasses werden in Bild 5.10 gezeichnet. Da jeder Adaptor 3 Addierer (explicit adders) enthält, werden insgesamt 28 Addierer benötigt, um diesen Hochpaß zu realisieren.

5.3.3 Weichenfilter

Falls die Dämpfungsanforderungen eines Weichenfilters wie in Bild 3.3 angegeben sind und $f_{lp} < F/4$, $f_{ls} > F/4$, $f_{hs} < F/4$, und $f_{hp} > F/4$ ist, dann kann dieses Weichenfilter mit Hilfe von bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern direkt aus dem Filterkatalog mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten entworfen werden. Die normierte Sperrgrenze des Tiefpaßes wird durch

$$f_{sz}/F = \min\{f_{ls}/F, f_{hp}/F, (1/2 - f_{lp}/F), (1/2 - f_{hs}/F)\} \quad (5.15)$$

und die minimal zulässige Dämpfung im Sperrbereich durch

$$A_{sz} = \max\{A_{ls}, A'_{ls}, A_{hs}, A'_{hs}\} \quad (5.16)$$

bestimmt, wobei A'_{ls} und A'_{hs} entweder durch (5.8) und (5.14) berechnet oder direkt aus dem Hilfsdiagramm in Bild 5.2 abgelesen werden. Der Entwurf der Tiefpässe wird im Abschnitt 5.3.1 erläutert. Die Übertragungsfunktion des Tiefpaßes entspricht der Übertragung vom Eingang zum Ausgang I und des Hochpaßes vom Eingang zum Ausgang II.

Falls die Dämpfungsanforderungen eines Weichenfilters spiegelbildlich zu einem Viertel der Abtastperiode liegen, d.h.,

$$\begin{aligned} A_{ls} &= A_{hs} \quad , \quad A_{lp} = A_{hs} = -10 \log(1 - 10^{-A_{ls}/10}) \quad , \\ f_{ls} &= f_{hp} \quad , \quad f_{lp} = f_{hs} = F/2 - f_{ls} \quad , \end{aligned}$$

dann sind die bireziproken Brücken-Wellendigitalfilter für den Entwurf des Weichenfilters besonders gut geeignet.

Beispiel für den Entwurf der Weichenfilter

Die Dämpfungsanforderungen eines Weichenfilters, das für den Entwurf des Transmultiplexers [16,93,94] benutzt wird, sind gemäß Bilder 5.7 und 5.8 wie folgt angegeben:

$$\begin{aligned} F &= 48 \text{ kHz} \quad , \quad A_{ls} = A_{hs} = 65 \text{ dB} \quad , \\ f_{ls} &= f_{hs} = 8 \text{ kHz} \quad , \quad f_{lp} = f_{hp} = 16 \text{ kHz} \quad . \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (5.15) und (5.16) können wir die normierte Sperrgrenze des Tiefpaßes

$$f_{sz}/F = 0.333$$

und die zulässige Dämpfung im Sperrbereich

$$A_{sz} = 65 \text{ dB}$$

bestimmen. Aus dem Hilfsdiagramm in Bild 5.3 wird der notwendige Grad $N = 7$ mit den idealen Multipliziererkoeffizienten abgelesen. Mit Hilfe von anderen Hilfsdiagrammen wie z.B. Bilder 5.4, 5.5, 5.6 können wir den notwendigen Realisierungsaufwand der Multipliziererkoeffizienten direkt ablesen. Aus den Bildern 5.4, 5.5 und 5.6 erkennen wir, daß für den Grad 7 das Realisierungsmaß (Anzahl der Implizitaddierer) des Koeffizientenvektors mindestens $K(\underline{\gamma}) = 5$ sein muß, um die angegebenen Dämpfungsanforderungen erfüllen zu können. Mit $N = 7$ und $K(\underline{\gamma}) = 5$ und $f_{sz}/F = 0.333$ können wir direkt aus dem Katalog die diskret optimierten Koeffizientenwerte mit dem zugehörigen minimalen Dämpfungswert im Sperrbereich wie folgt ablesen (Tabelle 5.1).

$$A_s = 66.63 \text{ dB} ,$$

$$\gamma_1 : 1-3-5 \ 8 ,$$

$$\gamma_1 = 2^{-1} - 2^{-3} - 2^{-5} + 2^{-8} ,$$

$$\gamma_2 : 3-5 ,$$

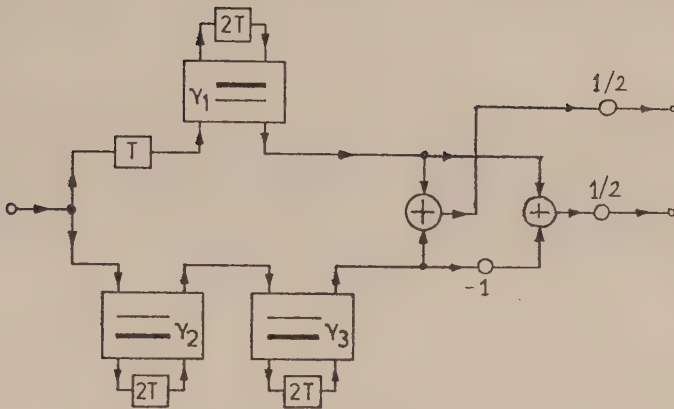
$$\gamma_2 = 2^{-3} - 2^{-5} ,$$

$$\gamma_3 : 0-2-6 ,$$

$$\gamma_3 = 2^0 - 2^{-2} - 2^{-6} , \ (\gamma'_3 = 1 - \gamma_3 = 2^{-2} + 2^{-6}) .$$

Für den Adaptor mit dem Koeffizienten γ_3 wird den äquivalenten Adaptor (Bild 2.6) mit dem Koeffizienten γ'_3 benutzt. Das Wellenflußdiagramm und der Dämpfungsverlauf des Weichenfilters werden in Bild 5.11 gezeichnet. Da jeder Adaptor 3 Addierer (explicit adders [5]) enthält, werden insgesamt 16 Addierer benötigt, um dieses bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter zu realisieren.

(a)



(b)

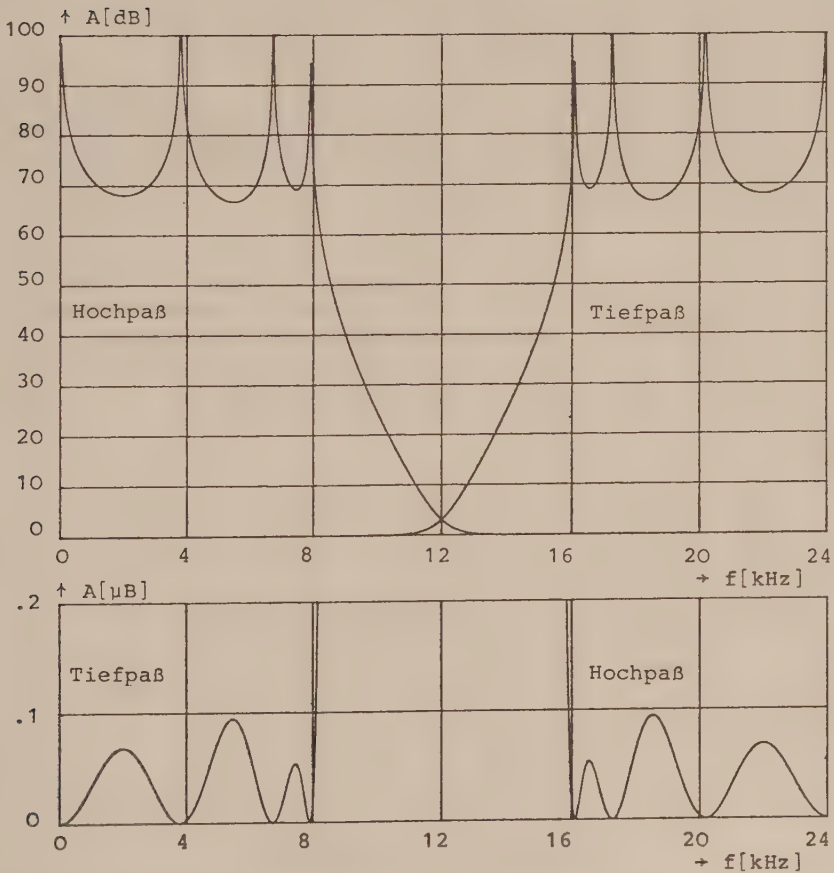


Bild 5.11 (a) Wellenflußdiagramm des Weichenfilters, 7. Grades. (b) Dämpfungsverlauf des Weichenfilters im Sperr- und Durchlaßbereich mit diskret optimierten Koeffizientenwerten.

5.3.4 Bandpässe

Falls die Dämpfungsanforderungen eines Bandpasses in Bild 3.6 durch die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (3.26) mit (3.37) auf die Dämpfungsanforderungen eines bi-reziproken Brücken-Wellendigitalfilters zurückgeführt werden können, dann kann dieses Bandpaß unter Benutzung des Filterkatalogs direkt mit diskret optimierten Koeffizientenwerten entworfen werden. Neben der Beziehungen in (3.27), d.h.,

$$\varphi_{s1} \leq \varphi_{s1x} < \varphi_{p1x} \leq \varphi_{p1} < \varphi_{p2} \leq \varphi_{p2x} < \varphi_{s2x} \leq \varphi_{s2} \quad , \quad (5.17a)$$

$$\varphi_{s1x}\varphi_{s2x} = \varphi_{p1x}\varphi_{p2x} = \varphi_{ox}^2 \quad , \quad (5.17b)$$

muß auch zwischen der Durchlaßgrenze

$$\varphi_{lpz} = \beta_{ox}(\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x}) = \frac{\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x}}{1 + \varphi_{ox}^2} = \tan \left[\frac{\pi}{F}(f_{p2x} - f_{p1x}) \right] = \tan \left(\frac{\pi}{F} f_{lpz} \right) \quad (5.17c)$$

und der Sperrgrenze

$$\varphi_{lsz} = \beta_{ox}(\varphi_{s2x} - \varphi_{s1x}) = \frac{\varphi_{s2x} - \varphi_{s1x}}{1 + \varphi_{ox}^2} = \tan \left[\frac{\pi}{F}(f_{s2x} - f_{s1x}) \right] = \tan \left(\frac{\pi}{F} f_{lsz} \right) \quad (5.17d)$$

des Tiefpasses die folgende Beziehung gelten:

$$\varphi_{lpz} = \frac{1}{\varphi_{lsz}} < 1 \quad , \quad (5.17e)$$

wobei f_{s1x} , f_{p1x} , f_{p2x} , f_{s2x} , f_{lpz} , f_{lsz} die zugehörigen Frequenzengrößen von φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} , φ_{s2x} , φ_{lpz} , φ_{lsz} sind. Die Beziehungen in (5.17) können durch

$$0 < f_{s1} \leq f_{s1x} < f_{p1x} \leq f_{p1} < f_{p2} \leq f_{p2x} < f_{s2x} \leq f_{s2} < \frac{F}{2} \quad , \quad (5.18a)$$

und

$$f_{p2} - f_{p1} \leq f_{p2x} - f_{p1x} = f_{lpz} < \frac{F}{4} < f_{lsz} = f_{s2x} - f_{s1x} \leq f_{s2} - f_{s1} \quad , \quad (5.18b)$$

$$f_{lpz} + f_{lsz} = \frac{F}{2} \quad (5.18c)$$

ausgedrückt werden. Neben der selbstverständlichen Bedingung

$$f_{s1} < f_{p1} < f_{p2} < f_{s2} \quad , \quad (5.19a)$$

muß also gelten

$$f_{p2} - f_{p1} < \frac{F}{4} < f_{s2} - f_{s1} \quad , \quad (5.19b)$$

d.h.,

$$\frac{\varphi_{p2} - \varphi_{p1}}{1 + \varphi_{p1}\varphi_{p2}} < 1 < \frac{\varphi_{s2} - \varphi_{s1}}{1 + \varphi_{s1}\varphi_{s2}} \quad . \quad (5.19c)$$

Gemäß (5.17e) können wir die Größe Ω_x in (3.30) wie folgt schreiben

$$\Omega_x = \frac{\varphi_{lsx}}{\varphi_{lpz}} = \varphi_{lsx}^2 = \frac{1}{\varphi_{lpz}^2} \quad (5.20a)$$

und auch

$$1 < \varphi_{lsx} = \frac{1}{\varphi_{lpz}} = \sqrt{\Omega_x} \quad (5.20b)$$

Aus (5.17b,c,d) mit (5.20b) folgt

$$\varphi_{lsx} = \frac{\varphi_{s2x}^2 - \varphi_{ox}^2}{\varphi_{s2x}(1 + \varphi_{ox}^2)} = \frac{\varphi_{ox}^2 - \varphi_{s1x}^2}{\varphi_{s1x}(1 + \varphi_{ox}^2)} = \sqrt{\Omega_x} \quad , \quad (5.21a)$$

$$\varphi_{lpz} = \frac{\varphi_{p2x}^2 - \varphi_{ox}^2}{\varphi_{p2x}(1 + \varphi_{ox}^2)} = \frac{\varphi_{ox}^2 - \varphi_{p1x}^2}{\varphi_{p1x}(1 + \varphi_{ox}^2)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_x}} \quad (5.21b)$$

Mit Hilfe der bereits bekannten Beziehungen im Abschnitt 3.3 läßt sich für eine Wahl von φ_{ox} und Ω_x eine geeignete Wahl für φ_{s1x} oder φ_{p1x} oder φ_{p2x} oder φ_{s2x} treffen. Unter den jetzigen Umständen besteht aber keine Wahlmöglichkeiten, denn wegen (5.21) folgen φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} und φ_{s2x} eindeutig aus Ω_x und φ_{ox} , d.h.,

$$\varphi_{s2x}^2 - (1 + \varphi_{ox}^2)\sqrt{\Omega_x}\varphi_{p2x} - \varphi_{ox}^2 = 0 \quad , \quad (5.22a)$$

$$\varphi_{s1x}^2 + (1 + \varphi_{ox}^2)\sqrt{\Omega_x}\varphi_{s1x} - \varphi_{ox}^2 = 0 \quad , \quad (5.22b)$$

$$\varphi_{p2x}^2 - \frac{(1 + \varphi_{ox}^2)}{\sqrt{\Omega_x}}\varphi_{p2x} - \varphi_{ox}^2 = 0 \quad , \quad (5.22c)$$

$$\varphi_{p1x}^2 + \frac{(1 + \varphi_{ox}^2)}{\sqrt{\Omega_x}}\varphi_{p1x} - \varphi_{ox}^2 = 0 \quad , \quad (5.22d)$$

und daraus folgt, daß die Größen φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} und φ_{s2x} durch

$$\varphi_{s2x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{s1x}} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 + \varphi_{ox}^2)^2 \Omega_x + 4\varphi_{ox}^2} + (1 + \varphi_{ox}^2)\sqrt{\Omega_x} \right] \quad , \quad (5.23a)$$

$$\varphi_{s1x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{s2x}} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 + \varphi_{ox}^2)^2 \Omega_x + 4\varphi_{ox}^2} - (1 + \varphi_{ox}^2)\sqrt{\Omega_x} \right] \quad , \quad (5.23b)$$

$$\varphi_{p2x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{p1x}} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{4\varphi_{ox}^2 + (1 + \varphi_{ox}^2)^2 / \Omega_x} + (1 + \varphi_{ox}^2) / \sqrt{\Omega_x} \right] \quad , \quad (5.23c)$$

$$\varphi_{p1x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{p2x}} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{4\varphi_{ox}^2 + (1 + \varphi_{ox}^2)^2 / \Omega_x} - (1 + \varphi_{ox}^2) / \sqrt{\Omega_x} \right] \quad , \quad (5.23d)$$

gegeben sind. Umgekehrt folgt aus (5.23) offensichtlich

$$\varphi_{s1x}\varphi_{s2x} = \varphi_{p1x}\varphi_{p2x} = \varphi_{ox}^2 \quad . \quad (5.23e)$$

Außerdem folgt aus (5.23a), (5.23c) und $\Omega_x > 1$ (vgl. (5.20b)), daß

$$\varphi_{s2x} > \varphi_{p2x} \quad (5.24a)$$

ist und damit aus (5.23e) auch

$$\varphi_{p1x} > \varphi_{s1x} \quad (5.24b)$$

ist. Die Beziehungen in (5.18b) sind äquivalent mit

$$\frac{\varphi_{p2} - \varphi_{p1}}{1 + \varphi_{p1}\varphi_{p2}} \leq \frac{\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x}}{1 + \varphi_{ox}^2} = \varphi_{lpz} < 1 < \varphi_{lsz} = \frac{\varphi_{s2x} - \varphi_{s1x}}{1 + \varphi_{ox}^2} \leq \frac{\varphi_{s2} - \varphi_{s1}}{1 + \varphi_{s1}\varphi_{s2}}, \quad (5.25a)$$

also mit

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega_1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\Omega_x}} < 1 < \sqrt{\Omega_x} \leq \sqrt{\Omega_2} \quad (5.25b)$$

d.h., mit

$$1 < \Omega_x \leq \Omega' \quad (5.25c)$$

wobei

$$\Omega' = \min\{\Omega_1, \Omega_2\} \quad (5.25d)$$

und

$$\sqrt{\Omega_1} = \frac{1 + \varphi_{p1}\varphi_{p2}}{\varphi_{p2} - \varphi_{p1}}, \quad \sqrt{\Omega_2} = \frac{\varphi_{s2} - \varphi_{s1}}{1 + \varphi_{s1}\varphi_{s2}} \quad (5.25e, f)$$

ist.

Wir wollen jetzt zeigen, welche zusätzliche Einschränkungen für Ω_x und φ_{ox} sich ergeben, wenn die Größen φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} und φ_{s2x} gemäß (5.23) gewählt werden. Wir unterscheiden zwei Fälle entsprechend dem, wo wir im Abschnitt 3.3 getan haben.

Fall 1

Es gelte

$$\varphi_{po} \leq \varphi_{so} \quad \text{mit} \quad \varphi_{po}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{p2} \quad , \quad \varphi_{so}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{s2} \quad , \quad (5.26a, b, c)$$

wobei φ_{po} und φ_{so} positive Konstanten sind.

a)

$$\varphi_1 < \varphi_{ox} \leq \varphi_{po} \leq \varphi_{so} \quad \text{mit} \quad \varphi_1 = \sqrt{\varphi_{s1}\varphi_{p2}} \quad . \quad (5.27a, b)$$

Im Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, daß die Beziehungen in (3.27) für die Größen φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} , φ_{s2x} gelten, wenn man φ_{ox} aus dem Bereich in (5.27) und Ω_x aus dem Bereich in (3.111) und φ_{p2x} aus dem Bereich in (3.112) wählt und die Größen φ_{p1x} , φ_{s1x} und φ_{s2x} durch (3.113) bestimmt. Da wir hier φ_{p2x} gemäß (5.23c) wählen müssen, müssen für φ_{p2x} die Beziehungen in (3.112) gelten. Die Beziehung $\varphi_{p2x} \geq \varphi_{p2}$ gilt, wenn

$$\sqrt{4\varphi_{ox}^2 + (1 + \varphi_{ox}^2)^2/\Omega_x} + (1 + \varphi_{ox}^2)/\sqrt{\Omega_x} \geq 2\varphi_{p2} \quad (5.28)$$

ist. Da der Wert des Termes in der linken Seite der Ungleichung in (5.28) bei festem φ_{ox} für wachsendes Ω_x monoton abnimmt, existiert eine obere Schranke Ω_{x1} von Ω_x . Man kann diese durch die Lösung der Gleichung

$$\sqrt{4\varphi_{ox}^2 + (1 + \varphi_{ox}^2)^2/\Omega_{x1}} + (1 + \varphi_{ox}^2)/\sqrt{\Omega_{x1}} = 2\varphi_{p2} \quad (5.29)$$

bestimmen. Dann erhalten wir für Ω_x die folgende obere Schranke

$$\Omega_x \leq \Omega_{x1} \quad , \quad \sqrt{\Omega_{x1}} = \varphi_{p2} \frac{1 + \varphi_{ox}^2}{\varphi_{p2}^2 - \varphi_{ox}^2} \quad (5.30a, b)$$

Für $\varphi_{ox} \leq \varphi_{po}$ ist $\Omega_{x1} \leq \Omega_1$.

Außerdem muß auch die rechte Seite der Ungleichung in (3.112) erfüllt sein, d.h., es muß gelten

$$f\left(\frac{\varphi_{p2x}}{\varphi_{ox}}\right) \leq \frac{\Omega_{xmax}}{\Omega_x} f\left(\frac{\varphi_{p2}}{\varphi_{ox}}\right) \quad , \quad (5.31)$$

wobei Ω_{xmax} durch (3.110) definiert ist. Wenn wir Ω_{xmax} gemäß (3.110) in (5.31) einsetzen und die Ungleichung in (5.31) nach Ω_x lösen, erhalten wir für Ω_x eine weitere obere Schranke

$$\Omega_x \leq \Omega_{x2} \quad , \quad \sqrt{\Omega_{x2}} = \frac{\varphi_{ox}^2 - \varphi_{s1}^2}{(1 + \varphi_{ox}^2)\varphi_{s1}} \quad (5.32a, b)$$

Für $\varphi_{ox} \leq \varphi_{po} \leq \varphi_{so}$ ist $\Omega_{x2} \leq \Omega_2$.

Für $\varphi_1 < \varphi_{ox} \leq \varphi_{po}$ (vgl. (5.27b)) nehmen Ω_{x1} und Ω_{x2} mit wachsendem φ_{ox} streng monoton zu und erreichen für $\varphi_{ox} = \varphi_{po}$ die Werte

$$\Omega_{x1} = \Omega_1 > 1 \quad (5.33a)$$

und

$$\sqrt{\Omega_{x2}} = \frac{\varphi_{p1}\varphi_{p2} - \varphi_{s1}^2}{(1 + \varphi_{p1}\varphi_{p2})\varphi_{s1}} \quad (5.33b)$$

Es existieren also Lösungen von (5.30a) und (5.32a) mit $\Omega_x > 1$, falls

$$\frac{\varphi_{p1}\varphi_{p2} - \varphi_{s1}^2}{(1 + \varphi_{p1}\varphi_{p2})\varphi_{s1}} > 1 \quad (5.34a)$$

ist, d.h., wenn

$$\varphi_{po}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{p2} > \varphi_{s1} \frac{1 + \varphi_{s1}}{1 - \varphi_{s1}} \quad (5.34b)$$

ist. Wir definieren φ_{s2o} und f_{s2o} durch

$$\varphi_{s2o} = \frac{\varphi_{p1}\varphi_{p2}}{\varphi_{s1}} = \frac{\varphi_{po}^2}{\varphi_{s1}} = \tan\left(\pi \frac{f_{s2o}}{F}\right) \quad (5.35)$$

. Die Bedingung in (5.34) kann dann durch

$$\varphi_{s2o} > \frac{1 + \varphi_{s1}}{1 - \varphi_{s1}} , \quad (5.36a)$$

d.h.,

$$\frac{\varphi_{s2o} - \varphi_{s1}}{1 + \varphi_{s1}\varphi_{s2}} > 1 \quad \text{bzw.} \quad f_{s2o} - f_{s1} > \frac{F}{4} \quad (5.36b, c)$$

ausgedrückt werden. Es gilt

$$\varphi_{s2o} = \frac{\varphi_{po}^2}{\varphi_{s1}} \leq \frac{\varphi_{so}^2}{\varphi_{s1}} = \varphi_{s2} . \quad (5.37)$$

Wir wollen jetzt die Schranken für φ_{ox} bestimmen. Es gilt

$$\sqrt{\Omega_{x1}\Omega_{x2}} = \Omega_{x\max} . \quad (5.38)$$

Daraus folgt, daß

$$\min\{\Omega_{x1}, \Omega_{x2}\} \leq \Omega_{x\max} \quad (5.39)$$

ist. Es genügt also in der Tat, die Schranken in (5.30b) und (5.32b) zu betrachten, um die zulässigen Werte von φ_{ox} zu ermitteln. Also, die zulässigen Werte von φ_{ox} sind die Werte, für die $\Omega_{x1} > 1$ und $\Omega_{x2} > 1$ sind. Da Ω_{x1} in (5.30b) für $\varphi_{ox} < \varphi_{p2}$ mit wachsendem φ_{ox} monoton steigt, existiert für φ_{ox} die folgende untere Schranke (Wert von φ_{ox} , für den $\Omega_{x1} = 1$ würde)

$$\varphi_{ox} > \varphi_{o1} , \quad \varphi_{o1}^2 = \varphi_{p2} \frac{\varphi_{p2} - 1}{\varphi_{p2} + 1} \quad \text{für} \quad \varphi_{p2} > 1 , \quad (5.40a, b)$$

wobei $\varphi_{o1} > 0$ ist. Für $\varphi_{p2} < 1$ und $\varphi_{ox} < \varphi_{po}$ ist Ω_{x1} immer größer als 1, da Ω_{x1} für wachsendes φ_{ox} monoton steigt und für $\varphi_{ox} = 0$ seinen minimalen Wert $1/\varphi_{p2}$ erreicht. Da Ω_{x2} in (5.32b) mit wachsendem φ_{ox} monoton steigt, existiert für φ_{ox} eine weitere untere Schranke

$$\varphi_{ox} > \varphi_{o2} , \quad \varphi_{o2}^2 = \varphi_{s1} \frac{1 + \varphi_{s1}}{1 - \varphi_{s1}} , \quad (5.41a, b)$$

wobei $\varphi_{o2} > 0$ ist. Der zulässige Bereich von φ_{ox} wird durch

$$\varphi_o < \varphi_{ox} \leq \varphi_{po} \quad (5.42a)$$

mit

$$\varphi_o = \max\{\varphi_{o1}, \varphi_{o2}\} \quad \text{für} \quad \varphi_{p2} > 1 , \quad (5.42b)$$

$$\varphi_o = \varphi_{o2} \quad \text{für} \quad \varphi_{p2} \leq 1 \quad (5.42c)$$

bestimmt. Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen. Falls

$$\frac{F}{4} < f_{s2o} - f_{s1} \quad (5.43a)$$

mit

$$f_{s2o} = \frac{F}{\pi} \arctan(\varphi_{s2o}) \quad , \quad \varphi_{s2o} = \frac{\varphi_{po}^2}{\varphi_{s1}} = \frac{\varphi_{p1}\varphi_{p2}}{\varphi_{s1}} \quad (5.44b, c)$$

ist, dann wähle man einen geeigneten Wert für φ_{oz} so (sinnvollerweise den Wert, für den der Multipliziererkoeffizient γ_{oz} in (3.41) mit minimalem Aufwand realisiert werden kann), daß

$$\varphi_o < \varphi_{oz} \leq \varphi_{po} \quad (5.45a)$$

mit

$$\varphi_o = \max\{\varphi_{o1}, \varphi_{o2}\} \quad \text{für} \quad f_{p2} > \frac{F}{4} \quad , \quad (5.45b)$$

$$\varphi_o = \varphi_{o2} \quad \text{für} \quad f_{p2} \leq \frac{F}{4} \quad , \quad (5.45c)$$

$$\varphi_{o1}^2 = \varphi_{p2} \frac{\varphi_{p2} - 1}{\varphi_{p2} + 1} \quad , \quad \varphi_{o2}^2 = \varphi_{s1} \frac{1 + \varphi_{s1}}{1 - \varphi_{s1}} \quad (5.45d, e)$$

ist, und dann definiere man Ω_{xo} durch

$$\Omega_{xo} = \min\{\Omega_{x1}, \Omega_{x2}\} \quad , \quad (5.46a)$$

wobei

$$\sqrt{\Omega_{x1}} = \varphi_{p2} \frac{1 + \varphi_{oz}^2}{\varphi_{p2}^2 - \varphi_{oz}^2} \quad , \quad \sqrt{\Omega_{x2}} = \frac{\varphi_{oz}^2 - \varphi_{s1}^2}{(1 + \varphi_{oz}^2)\varphi_{s1}} \quad (5.46b, c)$$

ist. Da wegen (5.38) die Beziehung (5.39) gilt, genügt es in der Tat, die durch (5.46a) definierte Funktion zu betrachten. Man wähle dann Ω_x so, daß

$$1 < \Omega_x \leq \Omega_{xo} \quad (5.47)$$

ist und bestimme φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} und φ_{s2x} durch (5.23).

Wir können zeigen, daß für die Größen φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} und φ_{s2x} in (5.23) die Beziehung (3.113b) gilt. Die Gleichung (3.113b) kann wie folgt geschrieben werden

$$\varphi_{s2x} - \varphi_{s1x} = \Omega_x(\varphi_{p2x} - \varphi_{p1x}) \quad . \quad (5.48)$$

Wenn wir die Größen aus (5.23) in (5.48) einsetzen, stellen wir fest, daß (5.48) bzw. (5.113b) erfüllt ist. Im Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, wenn die Beziehungen in (3.112) und (3.113b) gelten, dann gelten die Beziehungen $\varphi_{p1x} \leq \varphi_{p1}$, $\varphi_{s1x} \geq \varphi_{s1}$ und $\varphi_{s2x} \leq \varphi_{s2}$.

b)

$$\varphi_{po} \leq \varphi_{oz} \leq \varphi_{so} \quad . \quad (5.49)$$

Durch (5.23a bis d) sind (3.117a bis c) erfüllt. Für die Größe φ_{p1x} in (5.23d) müssen die Beziehungen in (3.116) gelten. Die Beziehung $\varphi_{p1x} \leq \varphi_{p1}$ gilt, wenn

$$\varphi_{p1x} = \frac{\varphi_{ox}^2}{\varphi_{p2x}} = \frac{2\varphi_{ox}^2}{\sqrt{4\varphi_{ox}^2 + (1 + \varphi_{ox}^2)^2/\Omega_x} + (1 + \varphi_{ox}^2)/\sqrt{\Omega_x}} \leq \varphi_{p1} \quad (5.50)$$

ist. Da φ_{p2x} für abnehmende Ω_x monoton steigt, existiert eine obere Schranke für Ω_x . Man kann diese durch die Lösung der Gleichung

$$\frac{2\varphi_{ox}^2}{\sqrt{4\varphi_{ox}^2 + (1 + \varphi_{ox}^2)^2/\Omega_{x1}} + (1 + \varphi_{ox}^2)/\sqrt{\Omega_{x1}}} = \varphi_{p1} \quad (5.51)$$

bestimmen. Aus (5.50) und (5.51) folgt, daß

$$\Omega_x \leq \Omega_{x1} \quad \text{mit} \quad \sqrt{\Omega_{x1}} = \varphi_{p1} \frac{(1 + \varphi_{ox}^2)}{\varphi_{ox}^2 - \varphi_{p1}^2} \quad (5.52a, b)$$

ist. Für $\varphi_{po} \leq \varphi_{ox} \leq \varphi_{so}$ ist $\Omega_{x1} \leq \Omega_1$.

Außerdem muß auch die linke Seite der Ungleichung in (3.116) erfüllt werden, d.h., es muß gelten

$$f\left(\frac{\varphi_{ox}}{\varphi_{p1x}}\right) \leq \frac{\Omega_{x\max}}{\Omega_x} f\left(\frac{\varphi_{ox}}{\varphi_{p1}}\right), \quad (5.53)$$

wobei $\Omega_{x\max}$ gemäß (3.115) definiert ist. Wenn wir $\Omega_{x\max}$ gemäß (3.115) in (5.53) einsetzen und die Ungleichung in (5.53) nach Ω_x lösen, erhalten wir für Ω_x eine weitere obere Schranke

$$\Omega_x \leq \Omega_{x2}, \quad \sqrt{\Omega_{x2}} = \frac{\varphi_{ox}^2 - \varphi_{s1}^2}{\varphi_{s1}(1 + \varphi_{ox}^2)}. \quad (5.54a, b)$$

Der für Ω_{x2} gefundene Wert ist der gleiche wie in (5.32b). Für $\varphi_{ox} \leq \varphi_{so}$ ist $\Omega_{x2} \leq \Omega_2$.

Es gilt wiederum

$$\sqrt{\Omega_{x1}\Omega_{x2}} = \Omega_{x\max}. \quad (5.55)$$

Daraus folgt, daß

$$\min\{\Omega_{x1}, \Omega_{x2}\} \leq \Omega_{x\max} \quad (5.56)$$

ist. Es genügt also in der Tat, die Schranken in (5.32b) und (5.52b) zu betrachten, um die zulässigen Werte für φ_{ox} zu ermitteln.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Bedingungen in (5.19) für die Existenz von Lösungen notwendig und hinreichend sind. Aus (5.19c) können wir schreiben

$$\varphi_{po}^2 = \varphi_{p1}\varphi_{p2} < \varphi_{p1} \frac{1 + \varphi_{p1}}{1 - \varphi_{p1}} \quad \text{für} \quad \varphi_{p1} < 1 \quad (5.57)$$

und

$$\varphi_{so}^2 = \varphi_{s1}\varphi_{s2} > \varphi_{s1} \frac{1 + \varphi_{s1}}{1 - \varphi_{s1}}. \quad (5.58)$$

Da $\varphi_{p1} > \varphi_{s1}$ ist, gilt

$$\varphi_{s1} \frac{1 + \varphi_{s1}}{1 - \varphi_{s1}} < \varphi_{p1} \frac{1 + \varphi_{p1}}{1 - \varphi_{p1}} \quad (5.59)$$

Die Funktion Ω_{x1} ist für $\varphi_{ox} > \varphi_{p1}$ eine monoton abnehmende Funktion von φ_{ox} und erreicht den Wert 1 für

$$\varphi_{ox} = \varphi_{o1} \quad , \quad \varphi_{o1}^2 = \varphi_{p1} \frac{1 + \varphi_{p1}}{1 - \varphi_{p1}} \quad \text{für} \quad \varphi_{p1} < 1 \quad , \quad (5.60a, b)$$

wobei $\varphi_{o1} > 0$ ist. Für $\varphi_{ox} > \varphi_{p1}$ und $\varphi_{p1} \geq 1$ ist Ω_{x1} immer größer als 1, da Ω_{x1} für wachsendes φ_{ox} monoton abnimmt, aber immer größer als φ_{p1}^2 ist. Die Funktion Ω_{x2} ist für wachsendes φ_{ox} eine monoton steigende Funktion und erreicht den Wert 1 für

$$\varphi_{ox} = \varphi_{o2} \quad , \quad \varphi_{o2}^2 = \varphi_{s1} \frac{1 + \varphi_{s1}}{1 - \varphi_{s1}} \quad , \quad (5.61)$$

wobei $\varphi_{o2} > 0$ ist. Aus (5.57) und (5.58) folgt, daß

$$\varphi_{o1} > \varphi_{p0} \quad \text{und} \quad \varphi_{o2} < \varphi_{s0} \quad (5.62a, b)$$

und aus (5.59)

$$\varphi_{o2} < \varphi_{o1} \quad (5.62c)$$

ist. Aus (5.62) folgt, daß es für φ_{ox} einen zulässigen Bereich

$$\varphi_{o2} < \varphi_{ox} < \varphi_{o1} \quad (5.63)$$

gibt, aus dem für jeden Wert für φ_{ox} eine Lösung mit $\Omega_x > 1$ existiert.

Falls

$$\varphi_{o2} < \varphi_{p0} \quad \text{bzw.} \quad f_{s20} - f_{s1} > \frac{F}{4} \quad (5.64a, b)$$

ist, dann kann φ_{ox} aus dem Bereich

$$\varphi_{p0} \leq \varphi_{ox} < \varphi_{o1} \quad (5.65)$$

gewählt werden. Falls

$$\varphi_{o1} > \varphi_{s0} \quad \text{bzw.} \quad f_{p20} - f_{p1} < \frac{F}{4} \quad (5.66a, b)$$

mit

$$f_{p20} = \frac{F}{\pi} \arctan(\varphi_{p20}) \quad , \quad \varphi_{p20} = \frac{\varphi_{s1}\varphi_{s2}}{\varphi_{p1}} \quad (5.66c, d)$$

ist, dann kann φ_{ox} aus dem Bereich

$$\varphi_{o2} < \varphi_{ox} \leq \varphi_{s0} \quad (5.67)$$

gewählt werden. Falls

$$f_{p2o} - f_{p1} \geq \frac{F}{4} \quad \text{und} \quad f_{s2o} - f_{s1} \leq \frac{F}{4} \quad (5.68a, b)$$

ist, dann kann φ_{oz} aus dem Bereich

$$\varphi_{o2} < \varphi_{oz} < \varphi_{o1} \quad (5.69)$$

gewählt werden. Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen. Man wähle einen geeigneten Wert für φ_{oz} (sinnvollerweise den Wert, für den der Koeffizient γ_{oz} in (3.41) mit minimalem Aufwand realisiert werden kann.) aus dem Bereich

$$\varphi_{po} \leq \varphi_{oz} < \varphi_{o1} \quad \text{für} \quad f_{s2o} - f_{s1} > \frac{F}{4} \quad \text{und} \quad f_{p1} < \frac{F}{4}, \quad (5.70a)$$

$$\varphi_{po} \leq \varphi_{oz} \leq \varphi_{so} \quad \text{für} \quad f_{s2o} - f_{s1} > \frac{F}{4} \quad \text{und} \quad f_{p1} \geq \frac{F}{4}, \quad (5.70b)$$

$$\varphi_{o2} < \varphi_{oz} \leq \varphi_{so} \quad \text{für} \quad f_{p2o} - f_{p1} < \frac{F}{4}, \quad (5.70c)$$

$$\varphi_{o2} < \varphi_{oz} < \varphi_{o1} \quad \text{für} \quad f_{s2o} - f_{s1} \leq \frac{F}{4}, \quad f_{p2o} - f_{p1} \geq \frac{F}{4}, \quad (5.70d)$$

wobei

$$\varphi_{o1}^2 = \varphi_{p1} \frac{1 + \varphi_{p1}}{1 - \varphi_{p1}}, \quad (5.70e)$$

$$\varphi_{o2}^2 = \varphi_{s1} \frac{1 + \varphi_{s1}}{1 - \varphi_{s1}}, \quad (5.70f)$$

$$f_{p2o} = \frac{F}{\pi} \arctan(\varphi_{p2o}), \quad \varphi_{p2o} = \frac{\varphi_{s1} \varphi_{s2}}{\varphi_{p1}}, \quad (5.70g)$$

$$f_{s2o} = \frac{F}{\pi} \arctan(\varphi_{s2o}), \quad \varphi_{s2o} = \frac{\varphi_{p1} \varphi_{p2}}{\varphi_{s1}}, \quad (5.70h)$$

wobei $\varphi_{o1} > 0$ und $\varphi_{o2} > 0$ ist. Man definiere Ω_{zo} durch

$$\Omega_{zo} = \min\{\Omega_{z1}, \Omega_{z2}\}, \quad (5.71a)$$

wobei

$$\sqrt{\Omega_{z1}} = \varphi_{p1} \frac{1 + \varphi_{oz}^2}{\varphi_{oz}^2 - \varphi_{p1}^2}, \quad \sqrt{\Omega_{z2}} = \frac{\varphi_{oz}^2 - \varphi_{s1}^2}{\varphi_{s1}(1 + \varphi_{oz}^2)} \quad (5.71b, c)$$

ist. Da wegen (5.55) die Beziehung (5.56) gilt, genügt es in der Tat, die durch (5.71a) definierte Funktion zu betrachten. Man wähle dann Ω_x so, daß

$$1 < \Omega_x \leq \Omega_{zo} \quad (5.72)$$

ist und bestimme φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} und φ_{s2x} gemäß (5.23).

c)

$$\varphi_{p0} \leq \varphi_{s0} \leq \varphi_{0x} \quad , \quad \varphi_2 = \sqrt{\varphi_{p1}\varphi_{s2}} \quad . \quad (5.73)$$

Durch (5.23a bis d) sind (3.122a bis c) erfüllt. Für die Größe φ_{p1x} müssen die Beziehungen in (3.121) gelten. Die Beziehung $\varphi_{p1x} \leq \varphi_{p1}$ gilt, wenn (5.50) erfüllt ist. Aus (5.50) erhalten wir eine obere Schranke Ω_{x1} in (5.52b) für Ω_x . Außerdem muß auch die linke Seite der Ungleichung (3.121) erfüllt werden, d.h., es muß gelten

$$f\left(\frac{\varphi_{0x}}{\varphi_{p1x}}\right) \leq \frac{\Omega_{xmax}}{\Omega_x} f\left(\frac{\varphi_{0x}}{\varphi_{p1}}\right) \quad , \quad (5.74)$$

wobei Ω_{xmax} gemäß (3.119) definiert ist. Wenn wir Ω_{xmax} gemäß (3.119) in (5.74) einsetzen und die Ungleichung in (5.74) nach Ω_x lösen, erhalten wir für Ω_x eine weitere obere Schranke

$$\Omega_x \leq \Omega_{x2} \quad , \quad \sqrt{\Omega_{x2}} = \frac{\varphi_{s2}^2 - \varphi_{0x}^2}{\varphi_{s2}(1 + \varphi_{0x}^2)} \quad . \quad (5.75a, b)$$

Für $\varphi_{0x} \geq \varphi_{s0}$ ist $\Omega_{x2} \leq \Omega_2$.

Für $\varphi_{0x} = \varphi_{s0}$ ist

$$\sqrt{\Omega_{x1}} = \varphi_{p1} \frac{1 + \varphi_{s0}^2}{\varphi_{s0}^2 - \varphi_{p1}^2} \quad (5.76a)$$

und

$$\Omega_{x2} = \Omega_2 > 1 \quad . \quad (5.76b)$$

Da für $\varphi_{0x} = \varphi_{s0}$ $\Omega_{x2} > 1$ ist, existieren also Lösungen von (5.52a) und (5.75a) mit $\Omega_x > 1$, falls

$$\frac{\varphi_{p1}(1 + \varphi_{s0}^2)}{\varphi_{s0}^2 - \varphi_{p1}^2} > 1 \quad (5.77a)$$

ist, d.h., wenn

$$f_{p20} - f_{p1} < \frac{F}{4} \quad (5.77b)$$

ist, wobei f_{p20} die gemäß (5.66c,d) definierte Größe ist. Wir wollen jetzt die Schranken für φ_{0x} bestimmen. Es gilt wiederum

$$\sqrt{\Omega_{x1}\Omega_{x2}} = \Omega_{xmax} \quad (5.78)$$

Daraus folgt, daß

$$\min\{\Omega_{x1}, \Omega_{x2}\} \leq \Omega_{xmax} \quad (5.79)$$

ist. Es genügt also in der Tat, die Schranken in (5.52b) und (5.75b) zu betrachten, um die zulässigen Werte von φ_{0x} zu ermitteln. Also, die zulässigen Werte von φ_{0x} sind die Werte, für die $\Omega_{x1} > 1$ und $\Omega_{x2} > 1$ sind. Da Ω_{x1} in (5.52b) für $\varphi_{0x} > \varphi_{p1}$ mit wachsendem φ_{0x} monoton abnimmt, existiert für φ_{0x} die in (5.60) angegebene Schranke

für $\varphi_{p1} < 1$. Für $\varphi_{p1} \geq 1$ ist Ω_{x1} immer größer als 1. Da Ω_{x2} mit wachsendem φ_{ox} monoton abnimmt, existiert für φ_{ox} eine weitere obere Schranke

$$\varphi_{ox} < \varphi_{o2} \quad \text{mit} \quad \varphi_{o2}^2 = \varphi_{s2} \frac{\varphi_{s2} - 1}{\varphi_{s2} + 1} \quad , \quad (5.80a, b)$$

wobei $\varphi_{o2} > 0$ ist. Der zulässige Bereich von φ_{ox} wird durch

$$\varphi_{so} \leq \varphi_{ox} < \varphi_o \quad \text{mit} \quad \varphi_o = \min\{\varphi_{o1}, \varphi_{o2}\} \quad (5.81a, b)$$

bestimmt.

Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen. Falls

$$f_{p2o} - f_{p1} < \frac{F}{4} \quad (5.82a)$$

mit

$$f_{p2o} = \frac{F}{\pi} \arctan(\varphi_{p2o}) \quad , \quad \varphi_{p2o} = \frac{\varphi_{s1}\varphi_{s2}}{\varphi_{p1}} \quad (5.82b, c)$$

ist, dann wähle man einen geeigneten Wert für φ_{ox} so (sinnvollerweise den Wert, für den der Koeffizient γ_{ox} in (3.41) mit minimalem Aufwand realisiert werden kann), daß

$$\varphi_{so} \leq \varphi_{ox} < \varphi_o \quad (5.83a)$$

mit

$$\varphi_o = \min\{\varphi_{o1}, \varphi_{o2}\} \quad \text{für} \quad f_{p1} < \frac{F}{4} \quad , \quad (5.83b)$$

$$\varphi_o = \varphi_{o2} \quad \text{für} \quad f_{p1} \geq \frac{F}{4} \quad , \quad (5.83c)$$

und

$$\varphi_{o1}^2 = \varphi_{p1} \frac{1 + \varphi_{p1}}{1 - \varphi_{p1}} \quad , \quad \varphi_{o2}^2 = \varphi_{s2} \frac{\varphi_{s2} - 1}{\varphi_{s2} + 1} \quad , \quad (5.83d, e)$$

ist, wobei $\varphi_{o1} > 0$ und $\varphi_{o2} > 0$ ist. Man definiere Ω_{xo} durch

$$\Omega_{xo} = \min\{\Omega_{x1}, \Omega_{x2}\} \quad (5.84a)$$

wobei

$$\sqrt{\Omega_{x1}} = \varphi_{p1} \frac{1 + \varphi_{ox}^2}{\varphi_{ox}^2 - \varphi_{p1}^2} \quad , \quad \sqrt{\Omega_{x2}} = \frac{\varphi_{s2}^2 - \varphi_{ox}^2}{\varphi_{s2}(1 + \varphi_{ox}^2)} \quad (5.84b, c)$$

ist. Wegen (5.78) die Beziehung (5.79) gilt, genügt es in der Tat, die durch (5.84a) definierte Funktion Ω_{xo} zu betrachten. Man wähle dann Ω_x so, daß

$$1 < \Omega_x \leq \Omega_{xo} \quad (5.85)$$

ist und bestimme φ_{s1z} , φ_{p1z} , φ_{p2z} und φ_{s2z} gemäß (5.23).

Fall 2

Es gelte

$$\varphi_{so} \leq \varphi_{po} \quad . \quad (5.86)$$

Wir werden für Fall 2 nur die Lösungen angeben.

a) Falls

$$f_{p2} - f_{p1o} < \frac{F}{4} \quad (5.87a)$$

mit

$$f_{p1o} = \frac{F}{\pi} \arctan(\varphi_{p1o}) \quad , \quad \varphi_{p1o} = \frac{\varphi_{s1}\varphi_{s2}}{\varphi_{p2}} \quad (5.87b, c)$$

ist, dann wähle man einen geeigneten Wert für φ_{oz} so (sinnvollerweise den Wert, für den der Koeffizient γ_{oz} in (3.41) mit minimalem Aufwand realisiert werden kann), daß

$$\varphi_o < \varphi_{oz} \leq \varphi_{so} \quad (5.88a)$$

mit

$$\varphi_o = \max\{\varphi_{o1}, \varphi_{o2}\} \quad \text{für} \quad f_{p2} > \frac{F}{4} \quad , \quad (5.88b)$$

$$\varphi_o = \varphi_{o2} \quad \text{für} \quad f_{p2} \leq \frac{F}{4} \quad , \quad (5.88c)$$

und

$$\varphi_{o1}^2 = \varphi_{p2} \frac{\varphi_{p2} - 1}{\varphi_{p2} + 1} \quad , \quad \varphi_{o2}^2 = \varphi_{s1} \frac{1 + \varphi_{s1}}{1 - \varphi_{s1}} \quad (5.88d, e)$$

ist, wobei $\varphi_{o1} > 0$ und $\varphi_{o2} > 0$ ist. Dann definiere man Ω_{zo} durch

$$\Omega_{zo} = \min\{\Omega_{z1}, \Omega_{z2}\} \quad (5.89a)$$

wobei

$$\sqrt{\Omega_{z1}} = \varphi_{p2} \frac{1 + \varphi_{oz}^2}{\varphi_{p2} - \varphi_{oz}^2} \quad , \quad \sqrt{\Omega_{z2}} = \frac{\varphi_{oz}^2 - \varphi_{s1}^2}{\varphi_{s1}(1 + \varphi_{oz}^2)} \quad (5.89b, c)$$

ist. Man wähle dann Ω_z so, daß

$$1 < \Omega_z \leq \Omega_{zo} \quad (5.90a)$$

ist und bestimme φ_{s1z} , φ_{p1z} , φ_{p2z} und φ_{s2z} gemäß (5.23).

b) Man wähle einen geeigneten Wert für φ_{0x} (sinnvollerweise den Wert, für den der Koeffizient γ_{0x} in (3.41) mit minimalem Aufwand realisiert werden kann) aus dem Bereich

$$\varphi_{s0} \leq \varphi_{0x} < \varphi_{o2} \quad \text{für} \quad f_{p2} - f_{p10} < \frac{F}{4}, \quad (5.91a)$$

$$\varphi_{o1} < \varphi_{0x} \leq \varphi_{p0} \quad \text{für} \quad f_{s2} - f_{s10} > \frac{F}{4} \quad \text{und} \quad f_{p2} > \frac{F}{4}, \quad (5.91b)$$

$$\varphi_{s0} \leq \varphi_{0x} \leq \varphi_{p0} \quad \text{für} \quad f_{s2} - f_{s10} > \frac{F}{4} \quad \text{und} \quad f_{p2} \leq \frac{F}{4}, \quad (5.91c)$$

$$\varphi_{o1} < \varphi_{0x} < \varphi_{o2} \quad \text{für} \quad f_{p2} - f_{p10} \geq \frac{F}{4} \quad \text{und} \quad f_{s2} - f_{s10} \leq \frac{F}{4}, \quad (5.91d)$$

mit

$$\varphi_{o1}^2 = \varphi_{p2} \frac{\varphi_{p2} - 1}{\varphi_{p2} + 1}, \quad (5.91e)$$

$$\varphi_{o2}^2 = \varphi_{s2} \frac{\varphi_{s2} - 1}{\varphi_{s2} + 1}, \quad (5.91f)$$

$$f_{p10} = \frac{F}{\pi} \arctan(\varphi_{p10}) \quad , \quad \varphi_{p10} = \frac{\varphi_{s1}\varphi_{s2}}{\varphi_{p2}}, \quad (5.91g)$$

$$f_{s10} = \frac{F}{\pi} \arctan(\varphi_{s10}) \quad , \quad \varphi_{s10} = \frac{\varphi_{p1}\varphi_{p2}}{\varphi_{s2}}, \quad (5.91h)$$

wobei $\varphi_{o1} > 0$ und $\varphi_{o2} > 0$ ist. Man definiere Ω_{x0} durch

$$\Omega_{x0} = \min\{\Omega_{x1}, \Omega_{x2}\}, \quad (5.92a)$$

wobei

$$\sqrt{\Omega_{x1}} = \varphi_{p2} \frac{1 + \varphi_{0x}^2}{\varphi_{p2}^2 - \varphi_{0x}^2}, \quad \sqrt{\Omega_{x2}} = \frac{\varphi_{s2}^2 - \varphi_{0x}^2}{\varphi_{s2}(1 + \varphi_{0x}^2)}. \quad (5.92b, c)$$

Man wähle Ω_x so, daß

$$1 < \Omega_x \leq \Omega_{x0} \quad (5.93)$$

ist und bestimme φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} und φ_{s2x} gemäß (5.23).

c) Falls

$$f_{s2} - f_{s10} > \frac{F}{4} \quad (5.94a)$$

mit

$$f_{s10} = \frac{F}{\pi} \arctan(\varphi_{s10}) \quad , \quad \varphi_{s10} = \frac{\varphi_{p1}\varphi_{p2}}{\varphi_{s2}} \quad (5.94b, c)$$

ist, dann wähle man φ_{0x} aus dem Bereich einen geeigneten Wert für φ_{0x} (sinnvollerweise den Wert, für den der Koeffizient γ_{0x} in (3.41) mit minimalem Aufwand realisiert werden kann) aus dem Bereich

$$\varphi_{p0} \leq \varphi_{0x} < \varphi_o \quad (5.95a)$$

mit

$$\varphi_o = \min\{\varphi_{o1}, \varphi_{o2}\} \quad \text{für} \quad f_{p1} < \frac{F}{4}, \quad (5.95b)$$

$$\varphi_o = \varphi_{o2} \quad \text{für} \quad f_{p1} \geq \frac{F}{4}, \quad (5.95c)$$

und

$$\varphi_{o1}^2 = \varphi_{p1} \frac{1 + \varphi_{p1}}{1 - \varphi_{p1}}, \quad \varphi_{o2}^2 = \varphi_{s2} \frac{\varphi_{s2} - 1}{\varphi_{s2} + 1}, \quad (5.95d, e)$$

wobei $\varphi_{o1} > 0$ und $\varphi_{o2} > 0$ ist. Dann definiere man Ω_{xo} durch

$$\Omega_{xo} = \min\{\Omega_{x1}, \Omega_{x2}\}, \quad (5.96a)$$

wobei

$$\sqrt{\Omega_{x1}} = \varphi_{p1} \frac{1 + \varphi_{ox}^2}{\varphi_{ox}^2 - \varphi_{p1}^2}, \quad \sqrt{\Omega_{x2}} = \frac{\varphi_{s2}^2 - \varphi_{ox}^2}{\varphi_{s2}(1 + \varphi_{ox}^2)} \quad (5.96b, c)$$

ist. Man wähle dann Ω_{xo} so, daß

$$1 < \Omega_x \leq \Omega_{xo} \quad (5.97)$$

ist und bestimme φ_{s1x} , φ_{p1x} , φ_{p2x} und φ_{s2x} durch (5.23).

Nach der geeigneten Wahl von φ_{ox} und Ω_x wird aus dem Filterkatalog das bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter mit diskret optimierten Multiplizierkoeffizienten ausgewählt, dessen normierte Sperrgrenze

$$f_{sx}/F = \frac{1}{\pi} \arctan(\varphi_{lsx}) \quad , \quad \varphi_{lsx} = \sqrt{\Omega_x} \quad (5.98a, b)$$

und dessen minimal zulässige Sperrdämpfung mindestens

$$A_{sx} = \max\{A_s, A'_s\} \quad , \quad A'_s = -10 \log(1 - 10^{-A_p/10}) \quad (5.99a, b)$$

ist. Nach dem Entwurf des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm dieses Filters durch das in Bild 3.9d angegebene Wellenflußdiagramm ersetzt, wobei der Adaptorkoeffizient γ_{ox} in Bild 3.9d durch

$$\gamma_{ox} = \frac{\varphi_{ox}^2 - 1}{\varphi_{ox}^2 + 1} \quad (5.100)$$

bestimmt wird. Damit wird für den Koeffizienten γ_{ox} auf sehr einfache Weise ein diskret optimierter Wert bestimmt.

Beispiel

Die Dämpfungsanforderungen eines Bandpasses sind gemäß Bild 3.6 wie folgt angegeben:

$$f_{s1} = 0.5 \text{ kHz} , \quad f_{p1} = 2 \text{ kHz} , \quad f_{p2} = 4 \text{ kHz} , \quad f_{s2} = 6 \text{ kHz} , \\ F = 16 \text{ kHz} , \quad A_p = 0.01 \text{ dB} , \quad A_s = 65 \text{ dB} .$$

Da $\varphi_{s0} > \varphi_{p0}$ mit $\varphi_{s0} = 0.487$ und $\varphi_{p0} = 0.643$ ist, gilt der Fall 2.

a) Aus (5.87), (5.88) ermitteln wir für φ_{0x} den folgenden zulässigen Bereich

$$0.346 < \varphi_{0x} \leq 0.487$$

bzw. für den Koeffizienten γ_{0x} den folgenden zulässigen Bereich

$$-0.78565 < \gamma_{0x} \leq -0.61579$$

b) Aus (5.91) ermitteln wir für φ_{0x} den folgenden zulässigen Bereich

$$0.487 \leq \varphi_{0x} \leq 0.643$$

bzw. für γ_{0x} den folgenden zulässigen Bereich

$$-0.61579 \leq \gamma_{0x} \leq -0.41421$$

c) Aus (5.94), (5.95) ermitteln wir für φ_{0x} den folgenden zulässigen Bereich

$$0.643 \leq \varphi_{0x} < 1$$

bzw. für γ_{0x} den folgenden zulässigen Bereich

$$-0.41421 \leq \gamma_{0x} < 0$$

Wir wählen $\gamma_{0x} = -0.5$, dann bestimmen wir gemäß (5.92), (5.93) den zulässigen Bereich von Ω_x

$$1 < \sqrt{\Omega_x} \leq 1.707$$

Aus dem zulässigen Bereich von Ω_x wählen wir $\sqrt{\Omega_x} = 1.707$. Die Frequenzgrößen sind gemäß (5.23)

$$f_{s1x} = 0.698 \text{ kHz} , \quad f_{p1x} = 1.514 \text{ kHz} , \quad f_{p2x} = 4.213 \text{ kHz} , \quad f_{s2x} = 6 \text{ kHz} .$$

Damit wird die normierte Sperrgrenze des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters gemäß (5.98)

$$f_{sx}/F = 0.331$$

und die minimal zulässige Sperrdämpfung gemäß (5.99)

$$A_{sz} = 65 \text{ dB}$$

Aus dem Hilfsdiagramm in Bildern 5.4, 5.5 und 5.6 kann der notwendige Grad $N = 7$ und der Realisierungsaufwand (Anzahl der Implizitaddierer) des Koeffizientenvektors $K(\gamma) = 5$ abgelesen werden. Mit $N = 7$, $K(\gamma) = 5$ und $f_{sz}/F = 0.331$ können wir aus dem Filterkatalog die diskret optimierten Koeffizientenwerte mit dem zugehörigen minimalen Dämpfungswert im Sperrbereich wie folgt ablesen (Tabelle 5.1):

$$A_s = 65.85 \text{ dB}$$

$$\gamma_1 : 1-3-5 \quad \gamma_1' = 2^{-1} - 2^{-3} - 2^{-5} + 2^{-8}$$

$$\gamma_2 : 3-5 \quad \gamma_2 = 2^{-3} - 2^{-5}$$

$$\gamma_3 : 1-2-6 \quad \gamma_3 = 2^0 - 2^{-2} - 2^{-6} \quad (\gamma_3' = 1 - \gamma_3 = 2^{-2} + 2^{-6})$$

Für den Adaptor mit dem Koeffizienten γ_3 wird der äquivalente Adaptor (Bild 2.6) mit dem Koeffizienten γ_3' benutzt. Das Wellenflußdiagramm des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters wird in Bild 5.12a gezeichnet. Jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters wird durch das Wellenflußdiagramm in Bild 5.12b ersetzt, wobei der Wert des Adaptorkoeffizient $\gamma_{oz} = -0.5$ ist. Die Dämpfungsverläufe im Sperr- und Durchlaßbereich mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten werden in Bild 5.12c gezeichnet.

5.3.5 Bandsperren

Falls die Dämpfungsanforderungen einer Bandsperre durch die Tiefpaß-Bandsperre-Transformation (3.128) mit (3.37) auf die Dämpfungsanforderungen eines bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters zurückgeführt werden kann, dann kann diese Bandsperre unter Benutzung des Filterkatalogs direkt mit diskret optimierten Koeffizientenwerten entworfen werden. Nach der Tiefpaß-Bandsperre-Transformation (3.128) wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters durch das Wellenflußdiagramm in Bild 3.17d ersetzt, wobei der Multipliziererkoeffizient γ_{oz} gemäß (3.133) bestimmt wird und nur von φ_{oz} abhängt. Durch die Änderung von φ_{oz} läßt sich wie im Bandpaßfall für den Koeffizienten γ_{oz} ein zulässiger Bereich bestimmen. Die im Abschnitt 5.3.4 für die Bestimmung des zulässigen Bereiches für γ_{oz} hergeleiteten Gleichungen und Ungleichungen können hier direkt benutzt werden, wenn die Indizes der Größen durch

$$p \rightarrow s, \quad s \rightarrow p \quad (5.101a, b)$$

umgetauscht werden, wobei die Beziehung zwischen γ_{oz} und φ_{oz} durch (3.133) gegeben ist. Nach der geeigneten Wahl von φ_{oz} bzw. γ_{oz} und Ω_z wird das bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten direkt aus dem Katalog entworfen. Nach dem Entwurf des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters aus dem Katalog wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters durch das in Bild 3.17d angegebene Wellenflußdiagramm mit dem Adaptorkoeffizienten γ_{oz} ersetzt.

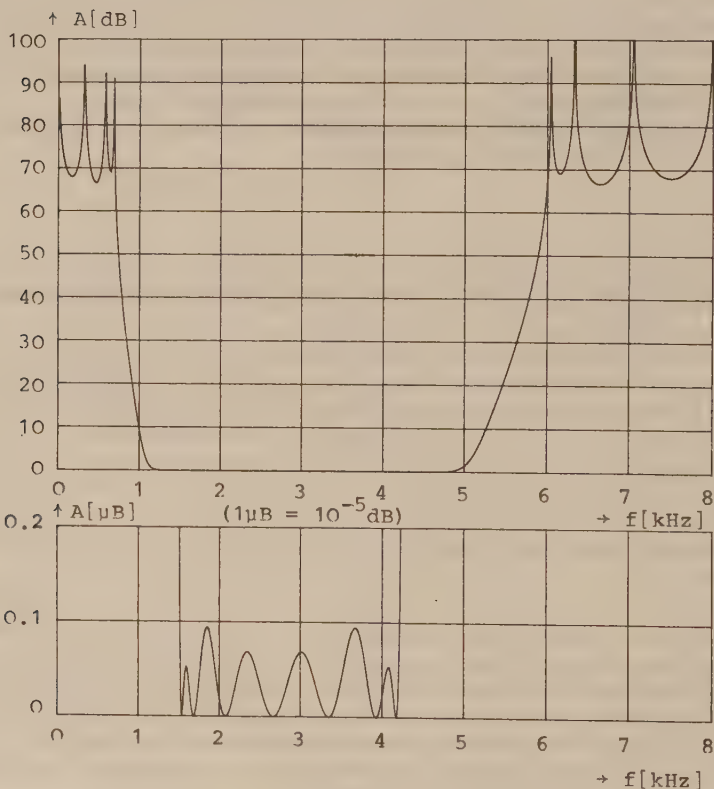
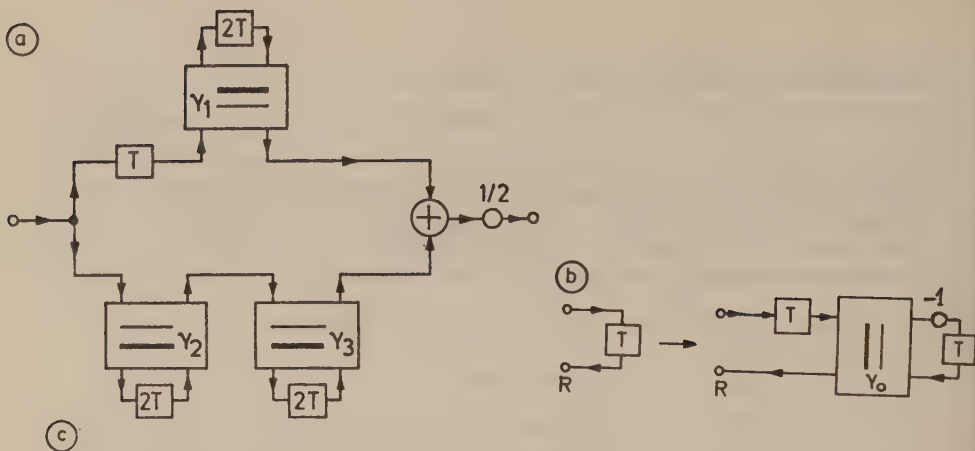


Bild 5.12 (a) Wellenflußdiagramm des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters 7. Grades, (b) jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters wird durch das Wellenflußdiagramm mit dem Adaptorkoeffizienten $\gamma_{0z} = -0.5$ ersetzt, (c) Dämpfungsverläufe im Sperr- und im Durchlaßbereich des Bandpasses 14. Grades mit den diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten.

6. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der diskreten Optimierung der Multipliziererkoeffizienten von Wellendigitalfiltern, insbesondere von Brücken-Wellendigitalfiltern. Ein Teil dieser Arbeit befaßt sich mit der Erstellung eines Filterkatalogs mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten.

Im Kapitel 2 dieser Arbeit werden zunächst einige Ergebnisse aus der Wellendigitalfiltertheorie rekapituliert und ein kurzer Überblick über Brücken-Wellendigitalfilter gegeben. Einige alternative Realisierungsmöglichkeiten von Reaktanzen werden vorgestellt, deren Wellenflußdiagramme mit Hilfe von Zweitor-Paralleladaptoren aufgebaut sind.

Im Kapitel 3 werden einige spezielle Frequenztransformationen vorgestellt, die im Wellenflußdiagramm eines passend gewählten Tiefpasses direkt durchführbar sind. Zunächst wird die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation für einige Wellenflußdiagramme durchgeführt. Bei der Anwendung dieser Transformation auf bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter werden $(N - 1)/2$ Zweitor-Paralleladaptoren mit dem jeweils gleichen Multipliziererkoeffizienten γ eingesetzt, wobei N der Grad der Übertragungsfunktion ist. Für diesen Adaptorkoeffizienten wird ein zulässiger Bereich angegeben, aus dem jeder beliebige Wert die angegebenen Dämpfungsanforderungen des Tiefpaß-Tiefpaß transformierten bireziproken Brücken-Wellendigitalfilters erfüllt. Dadurch kann für diese Multipliziererkoeffizienten auf sehr einfache Weise ein diskret optimierter Wert bestimmt werden. Weiterhin werden Tiefpaß-Hochpaß-, Tiefpaß-Bandpaß- und Tiefpaß-Bandsperre-Transformationen für Wellendigitalfilter untersucht. Für die Tiefpaß-Hochpaß-Transformation wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des passend gewählten Tiefpasses durch ein Verzögerungselement mit einem Vorzeichenumkehrer (Inverter) ersetzt. Für die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des passend gewählten Tiefpasses durch zwei Verzögerungselemente, einen Vorzeichenumkehrer und einen Zweitor-Paralleladaptor ersetzt. Für die Tiefpaß-Bandsperre-Transformation wird jedes Verzögerungselement im Wellenflußdiagramm des passend gewählten Tiefpasses durch zwei Verzögerungselemente und einen Zweitor-Paralleladaptor ersetzt. Die Multipliziererkoeffizienten γ der bei der Tiefpaß-Bandpaß- oder Tiefpaß-Bandsperre-Transformation eingesetzten Zweitor-Paralleladaptoren haben jeweils den gleichen Wert. Für diesen Koeffizienten γ heben wir wiederum einen zulässigen Bereich angegeben, aus dem jeder beliebige Wert die angegebenen Dämpfungsanforderungen des Bandpasses oder der Bandsperre zu erfüllen gestattet. Dadurch kann für diese Koeffizienten auf sehr einfache Weise ein diskret optimierter Wert bestimmt werden. Mit Hilfe der oben genannten Frequenztransformationen kann der Entwurf eines Hochpasses, Bandpasses oder einer Bandsperre mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten auf den Entwurf eines passend gewählten Tiefpasses mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten zurückgeführt werden.

Im 4. Kapitel wird ein neuartiger diskreter Optimierungsalgorithmus vorgestellt. Mit Hilfe dieses Optimierungsalgorithmus können die Multipliziererkoeffizienten von Wellendigitalfiltern in optimal quantisierter Form sehr effektiv ermittelt werden. Das Gütekriterium für die diskrete Optimierung ist, die Gesamtzahl der Addierer (Implizitaddierer), die für die Durchführung der Multiplikation benötigt werden, zu minimieren.

Das besondere Kennzeichen dieses Optimierungsalgorithmus ist es, die Suchstrategie des diskreten Optimums so zu gestalten, daß die Koeffizientenvektoren mit monoton steigendem Realisierungsaufwand geprüft werden. Je einfacher der Realisierungsaufwand der Koeffizienten ist, desto schneller liefert dieser Optimierungsalgorithmus ein diskretes Optimum. Da die Empfindlichkeiten der Multipliziererkoeffizienten bei Wellendigitalfiltern sehr gering sind und damit die Koeffizienten mit geringem Realisierungsaufwand ermittelt werden können, ist dieser Optimierungsalgorithmus insbesondere für Wellendigitalfilter sehr gut geeignet. Für die zahlreichen in dieser Arbeit getesteten Beispiele für Brücken-Wellendigitalfilter wurde dies bestätigt. Da bei der diskreten Optimierung die Dämpfung für die angegebenen Frequenzpunkte für jede Kombination der Koeffizientenwerte geprüft werden muß, hat die effiziente Berechnung der Dämpfung für die diskrete Optimierung eine große Bedeutung. Eine Möglichkeit ist es, die Dämpfung mit Hilfe der Übertragungsfunktion zu berechnen. Bei den Wellendigitalfiltern kann die Dämpfung mit Hilfe des Betrages der charakteristischen Funktion berechnet werden. Da die Wellendigitalfilter aus verlustfreien Zweitoren hergeleitet sind, ergibt sich eine weitere Vereinfachung bei der Berechnung des Betrages der charakteristischen Funktion, z.B. wird bei Brücken-Wellendigitalfiltern der Betrag der charakteristischen Funktion mit reellen Größen berechnet. Dadurch wird die Rechenzeit erheblich reduziert. Eine effiziente Berechnungsmethode des Betrages der charakteristischen Funktion für Brücken-Wellendigitalfilter mit Zweitordaptoren wird angegeben.

Ein weiteres Kennzeichen des in dieser Arbeit vorgestellten Optimierungsalgorithmus ist die systematische Suche des diskreten Optimums. Wegen der systematischen Suche wird die Berechnung der charakteristischen Funktion erheblich vereinfacht, da bei jeder Kombination der Koeffizienten nur eine geringe Anzahl der Koeffizienten ihre Werte ändern. Eine weitere Reduzierung des Rechenaufwandes bei der diskreten Optimierung kann durch die Berücksichtigung der Empfindlichkeiten der einzelnen Koeffizienten erzielt werden. Die Grenzen des Suchgebietes im diskreten Parameterraum können durch die Empfindlichkeitsverhältnisse der einzelnen Koeffizienten festgelegt werden. Die Empfindlichkeit der charakteristischen Funktion bei Brücken-Wellendigitalfiltern gegenüber Änderungen der Multipliziererkoeffizienten werden untersucht.

Im weiteren werden rekursive Formeln für die effiziente Berechnung der Übertragungsfunktion von allgemeinen Digitalfiltern hergeleitet. Mit Hilfe dieser Berechnungsmethode kann die Übertragungsfunktion von allgemeinen Digitalfiltern für die systematisch geänderten Koeffizientenwerte sehr effizient berechnet werden. Da hier die Berechnung der Übertragungsfunktion mit den komplexen Größen durchgeführt werden muß, ist die Effizienz nicht so groß wie bei der Berechnung der charakteristischen Funktion von Wellendigitalfiltern.

Durch die guten Eigenschaften von Wellendigitalfiltern ist die Aufgabe der diskreten Optimierung bei diesen Filtern erleichtert und dadurch wird die Chance vergrößert, ein globales Optimum zu finden. Ein globales Optimum ermöglicht wiederum einen geringen Realisierungsaufwand des Wellendigitalfilters.

Im 5. Kapitel wird die Erstellung eines Filterkatalogs für bireziproke Brücken-Wellendigitalfilter mit diskret optimierten Multipliziererkoeffizienten vorgestellt. Ausge-

hend von einem Toleranzschema können die im CSD (canonic signed digit) Kode diskret optimierten Koeffizientenwerte ohne weitere Berechnung direkt aus dem Katalog entnommen werden. Die Benutzung des Filterkatalogs wird durch verschiedene Hilfsdiagramme erleichtert. Diese Diagramme enthalten die zu dem jeweils unterschiedlichen Realisierungsaufwand und Filtergrad ermittelten minimalen Dämpfungswerte im Sperrbereich in Abhängigkeit von den normierten Grenzfrequenzen. Damit ist der Benutzer in der Lage, aus diesen Hilfsdiagrammen sofort den für die Erfüllung der Dämpfungsanforderungen notwendigen Realisierungsaufwand abzulesen. Ein solcher Filterkatalog bietet dem Anwender ohne Kenntnis der klassischen Filtertheorie einen direkten Zugang zum Entwurf von bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern .

Literaturverzeichnis

- [1] A. Fettweis, "Entwurf von Digitalfiltern in Anlehnung an Verfahren der klassischen Netzwerktheorie", Proc. NTG-Fachtagung "Analyse und Synthese von Netzwerken", S.17-20, Stuttgart, W. Germany, 15-16 Oktober, 1970.
- [2] A. Fettweis, "Digital filters related to classical filter networks", Arch. Elektr. Übertrag., Bd.25, S.79-89, Februar 1971.
- [3] A. Fettweis, "Some principles of designing digital filters imitating classical filter structures", IEEE Trans. Circuit Theory, Bd.CT-18, S.314-316, März 1971.
- [4] A. Fettweis, "Digital circuits and systems, IEEE Trans. Circuits Syst., Centennial Issue, Bd.CAS-31, S.31-48, Januar 1984.
- [5] A. Fettweis, "Wave digital filters: Theory and Practice", Proc. IEEE. Bd.74, No.2, S.270-327, Februar 1986.
- [6] A. Fettweis, "Pseudopassivity, sensitivity and stability of wave digital filters", IEEE Trans. Circuit Theory, Bd.CT-19, S.668-673, November 1972.
- [7] A. Fettweis and K. Meerkötter, "Suppression of parasitic oscillations in wave digital filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Bd.CAS-22, S.239-246, März 1975.
- [8] A. Fettweis and K. Meerkötter, "On parasitic oscillations in digital filters under looped conditions", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Bd.CAS-24, S.475-481, September 1977.
- [9] K. Meerkötter, "Incremental pseudo-passivity of wave digital filters", Proc. First European Signal Processing Conf. (EUSIPCO-80), S.27-32, Lausanne, Switzerland, September 1980.
- [10] K. Meerkötter, "Beiträge zur Theorie der Wellendigitalfilter", Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, W. Germany, Februar 1979.
- [11] A. Fettweis, H. Levin, A. Sedelmeyer, "Wave digital lattice filters", Int. Journal of Circuit Theory and Applications, Bd.2, Nr.2, S.203-211, Juni 1974.
- [12] R. Nouta, "The use of the Jaumann structures in wave digital filters", Int. Journal of Circuit Theory and Applications, Bd.2, Nr.2, S.163-174, Juni 1974.
- [13] W. Wegener, "Wave digital directional filters with reduced number of multipliers and adders", Archiv f. Elektronik und Übertragungstechnik, Bd.33, Nr.6, S.239-243, Juni 1979.
- [14] W. Wegener, "Entwurf von Wellendigitalfiltern mit minimalem Realisierungsaufwand", Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, W. Germany Januar 1980.
- [15] L. Gazsi, "Explicit formulas for lattice wave digital filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Bd.CAS-32, S.68-88, Januar 1985.
- [16] A. Fettweis, "Transmultiplexers with either analog conversion circuits, wave digital filters, or SC filters-A review", IEEE Trans. on Communications, Bd. COM-30, S.1575-1586, Juli 1982.
- [17] A. Fettweis, J.A. Nossek, K. Meerkötter, "Reconstruction of signals after filtering and sampling rate reduction", Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, Bd.1, S.11.7.1-11.7.4, San Diego, CA, März 1984.
- [18] A. Fettweis, "Realizability of digital filter networks", Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik, Bd.30, S.90-96, Februar 1976.

- [19] A. Fettweis and K. Meerkötter, "On adaptors for wave digital filters, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Bd. ASSP-3, S.516-525, Dezember 1975.
- [20] V. Belevitch, "Classical network theory", Holden Day, San Francisco 1968.
- [21] P.I. Richards, "Resistor transmission-line circuits, Proc. Inst. Radio Engrs. Bd.36, S.217-220, Februar 1948.
- [22] A.G. Constantinidis, "Frequency transformations for digital filters", Electronics Letters, Bd.3, No.11, S.487-489, November 1967.
- [23] A.G. Constantinidis, "Frequency transformations for digital filters", Electronics Letters, Bd.4, No.7, S.115-116, April 1968.
- [24] A.G. Constantinidis, "Spectral transformations for digital filters", Proceedings The Institution of Electrical Engineers, Bd.117, S.1585-1590, August 1970.
- [25] H.S. El-Ghoroury, S.C. Gupta, "Wave digital filter structures with variable frequency characteristics", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Bd.CAS-23, No.10, S.624-630, Oktober 1976.
- [26] M.N.S. Swamy, K.S. Thyagarajan, "Digital bandpass and bandstop filters with variable center frequency and bandwidth", Proc. IEEE, Bd.64, No.11, S.1632-1634, November 1976.
- [27] S.N. Güllüoglu, "Frequency transformations for wave digital filters", EUSIPCO-86, The Hague, September 1986.
- [28] L. Gazsi, S.N. Güllüoglu, "Branching wave digital lattice filter design with $(N+1)/2$ true multipliers", ECCTD'85, Bd.2, D.8.3, S.511-514, Prag, Tschechoslowakei, September 1985.
- [29] S.N. Güllüoglu, W. Wegener, L. Gazsi, "Katalog von bireziproken Brücken-Wellendigitalfiltern mit diskret optimierten Multiplizierkoeffizienten", DFG Kolloquium "Digitale Signalverarbeitung", S.41-44, Frankfurt, W. Germany, Februar 1985.
- [30] S.N. Güllüoglu, W. Wegener, L. Gazsi, "Catalog of bireciprocal wave digital low-pass filters with discrete optimized coefficients", IASTED International Symposium Applied Signal Processing and Digital Filtering, Adaptive and Nonadaptive, pp.120-123, Paris, Frankreich, Juni 1985.
- [31] G.W. Reitwiesner, "Binary arithmetic", Advances in Computers, Bd.1, Academic Press, New York, 1960, S.231-308.
- [32] L. Gazsi, "Hardware implementation of wave digital filters using programmable digital signal processors", Proc. European Conf. Circuit Theory and Design, S.1052-1057, The Hague, The Netherlands, August 1981.
- [33] L. Gazsi and A. Fettweis, "VLSI realization of wave digital filters for communication systems", Proc. IEEE Symp. Circuits and Systems, S.272-275, Rom, Italy, Mai 1982.
- [34] A. Rainer, W. Ulbrich, und L. Gazsi, "Adder-based digital signal processor architecture for 80 ns cycle time", Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, S.16.9.1-16.9.4, San Diego, CA, März 1984.
- [35] W. Dück, "Diskrete Optimierung", 1. Aufl., Braunschweig, Vieweg, 1977.
- [36] R. Boite, H. Dubois und H. Leich, "Optimisation of digital filters in the discrete space of coefficients", Electronics Letters, Bd.10, No.10, S.179-180, Mai 1974.
- [37] C. Charalambous und M.J. Best, "Optimization of recursive digital filters with finite word lengths", IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Proc., Bd. ASSP-22, No.6,

S.424-431, Dezember 1974.

- [38] K.A. Owenier, "Optimization of wave digital filters with reduced number of multipliers", Archiv für Elektr. und Übertragungstechnik, Bd.30, S.387-393, 1976.
- [39] K.A. Owenier, "Optimierung von Filtern, insbesondere von Wellendigitalfiltern mit verringerter Zahl an Multiplizierern", Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1977.
- [40] F. Pickhard, "Diskrete Optimierung der Multipliziererkoefizienten von Brücken-Wellendigitalfiltern", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1985.
- [41] K. Steiglitz, "Designing short-word recursive digital filters", Proc. of the 9th Annu. Allerton Conf. on Circuit and Syst. Theory, S.778-788, Oktober 1971.
- [42] E. Avenhaus, "On the design of digital filters with coefficients of limited word length", IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, Bd.AU-20, S.206-212, August 1972.
- [43] M. Suk und S.K. Mitra, "Computer-aided design of digital filters with finite word lengths", IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, Bd.AU-20, No.5, S.356-363, Dezember 1972.
- [44] R.E. Crochiere, "A new statistical approach to the coefficient word length problem for digital filters", IEEE Trans. Circuits Syst., Bd.CAS-22, S.190-196, März 1975.
- [45] W. Wegener, "Design of wave digital filters with very short coefficient word lengths", Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems, S.473-476, München 1976.
- [46] F. Brglez, "Digital filter design with short word-length coefficients", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Bd.CAS-25, No.12, S.1044-1050, Dezember 1978.
- [47] W. Wegener, "On the design of wave digital lattice filters with short coefficient word lengths and optimal dynamic range", IEEE Trans. on Circuits and Syst., Bd.CAS-25, S.1091-1097, Dezember 1978.
- [48] N.I. Smith, "A random-search method for designing finite-wordlength recursive digital filters", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Proc., Bd.ASSP-27, No.1, S.40-46, Februar 1979.
- [49] H.K. Kwan, "On the problem of designing IIR digital filters with short coefficient word lengths", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Proc., Bd.ASSP-27, No.6, S.620-624, Dezember 1979.
- [50] R. Bolton, P.C. Craig und L.C. Westphal, "Computer-aided design of recursive digital filters with coefficients having restricted minimal representation", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Proc., Bd.ASSP-29, No.6, S.1205-1208, Dezember 1981.
- [51] G. Dehner, "On the design of digital Cauer filters with coefficients of limited word-length", Archiv f. Elektronik u. Übertragungstechnik, Bd.29, Heft 4, S.165-168, 1975.
- [52] R. Jain, J. Vandewalle und H. De Man, "Discrete coefficient optimisation for the CAD of arbitrary integrated digital filters", Proc. Europ. Conf. Circ. Th. and Design, S.414-416, Stuttgart, September 1983.
- [53] R. Jain, J. Vandewalle und H. De Man, "Efficient CAD tools for the coefficient optimisation of arbitrary integrated digital filters", Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Proc., S.30.11.1-4, San Diego 1984.
- [54] R. Jain, J. Vandewalle und H. De Man, "Efficient and accurate multiparameter analysis of linear digital filters using a multivariable feedback representation", IEEE Trans. Circuits and Syst., Bd.CAS-32, S.225-235, März 1985.

- [55] R. Jain, "Computer-aided discrete-coefficient optimisation for custom integrated digital filters", Dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, Mai 1985.
- [56] A.R. Mirzai und S.S. Lawson, "Finite wordlength design of wave digital filters", Electronics Letters, Bd.22, No.16, S.851-853, Juli 1986.
- [57] L. Gazsi und S.N. Güllüoğlu, "Discrete optimization of coefficients in CSD code", Proc. IEEE Mediterranean Electrotechnical Conf., Bd.II, S.C3.08-C3.09, Athens, Greece, Mai 1983.
- [58] S.N. Güllüoğlu, "Diskrete Optimierung der Multipliziererkoeffizienten von Digitalfiltern", Proc. DFG Kolloquium "Digitale Signalverarbeitung", S.46-49, Hannover, Februar 1984.
- [59] X.R. Jiang und S.N. Güllüoğlu, "On discrete optimization of multiplier coefficients of digital filters", EUSIPCO-86, The Hague, September 1986.
- [60] R.E. Crochiere und A.V. Oppenheim, "Analysis of linear digital networks", Proc. IEEE, Bd.CT-18, No.1, S.581-595, Januar 1971.
- [61] R. Lückner, H. Thielmann, "Strukturorientierte Matrizendarstellung zur Analyse und Synthese linearer zeitdiskreter Netzwerke", Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik, Bd.31, S.26-32, 1977.
- [62] Proc. IEEE, Special Issue on Computer-Aided Design, Bd.55, November 1967.
- [63] IEEE Trans. Circuit Theory, Special Issue on Computer-Aided Circuit Design, Bd.CT-18, Januar 1971.
- [64] K. Singhal und J. Vlach, "Symbolic analysis of analog and digital circuits", IEEE Trans. on Circuits and Syst., Bd.CAS-24, No.11, S.598-609, November 1977.
- [65] K. Singhal und J. Vlach, "Symbolic circuit analysis", Proc. Inst. Elect. Eng., Bd.128, Pt. G, No.2, S.81-86, April 1981.
- [66] S.E. Belter und S.C. Bass, "Computer-aided analysis and design of digital filters with arbitrary topology", IEEE Trans. Circuits Syst., Bd.CAS-22, S.810-819, Oktober 1975.
- [67] L. Claesen, H.J. De Man und J. Vandewalle, "DIGEST a digital filter evaluation and simulation tool for MOSVLSI filter implementations", IEEE J. Solid-State Circuits, Bd.SC-19, S.414-424, Juni 1984.
- [68] R.P. Sellheyer, "Optimierte Berechnung der Übertragungsfunktion linearer zeitdiskreter Netzwerke mit Hilfe des Ansatzes über schwach besetzte Matrizen unter Zuhilfenahme eines Vektorsystems", Studienarbeit, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1986.
- [69] R.D. Berry, "An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution", IEEE Trans. on Circuit Theory, Bd.CT-18, No.1, Januar 1971.
- [70] A. Fettweis, "A general theorem for signal-flow networks", Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik, Bd.25, S.557-561, 1971.
- [71] W.J. Troop und E. Peskin, "The transfer function and sensitivity of a network with n variable elements", IEEE Trans. on Circuit Theory, S.242-244, Mai 1969.
- [72] K. Singhal, J. Vlach und P.R. Bryant, "Efficient computation of large-change multiparameter sensitivity", Circuit Theory Appl., Bd.1, S.237-247, 1973.
- [73] K.H. Leung und R. Spence, "Multiparameter large-change sensitivity analysis and systematic exploration", IEEE Trans. on Circuits and Syst., Bd.CAS-22, No.10, S.796-804, Oktober 1975.

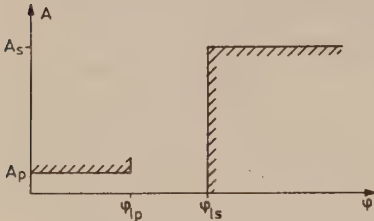
- [74] K. Antreich und R. Koblitz, "Zur Vereinheitlichung der Toleranz- und Empfindlichkeitsanalyse elektrischer Netzwerke", Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik, Heft 9, S.369-373, 1978.
- [75] G.C. Temes und K.M. Cho, "Large-change sensitivities of linear digital networks", IEEE Trans. on Circuits and Syst., Bd.CAS-25, No.2, S.113-114, Februar 1978.
- [76] S.B. Haley, "Large change response sensitivity of linear networks", IEEE Trans. on Circuits and Syst., Bd.CAS-27, No.4, April 1980.
- [77] A. Fettweis, "On the connection between multiplier word length limitation and roundoff noise in digital filters", IEEE Trans. on Circuit Theory, Bd.19, No.5, S.486-491, September 1972.
- [78] B.D.H. Tellegen, "A general network theorem, with applications", Philips Res. Reps., Bd.7, S.259-269, August 1952.
- [79] S.W. Director und R.A. Rohrer, "Automated network design. The frequency-domain case", IEEE Trans. Circuit Theory, Bd.CT-16, S.330-337, August 1969.
- [80] J.W. Bandler und R.E. Seviara, "Current trends in network optimization", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Bd.MIT-18, No.12, S.1159-1170, Dezember 1970.
- [81] H.W. Bode, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton 1945.
- [82] S.R. Parker und E. Peskin und P.M. Chirlian, "Application of a bilinear theorem to network sensitivity", IEEE Trans. on Circuit Theory, Bd.CT-12, S.448-450, September 1965.
- [83] K. Geher, "Theory of Network Tolerances", Akademiai Kiado, Budapest 1971.
- [84] J.K. Fidler und C. Nightingale, "Differential-incremental-sensitivity relationships", Electronics Letters, Bd.8, No.25, S.626-627, Dezember 1972.
- [85] T. Downs, "A note on the computation of large-change sensitivities", IEEE Trans. on Circuit Theory, S.741-742, November 1973.
- [86] J.K. Fidler, "Network sensitivity calculation", IEEE Trans. on Circuits and Syst., Bd.CAS-23, No.9, S.567-571, September 1976.
- [87] K.A. Owenier, "A general method for the efficient computation of sensitivities in wave digital filters", IEEE Trans. on Circuits and Syst. Bd.CAS-30, No.10, Oktober 1983.
- [88] H. Göckler und H. Scheuermann, "A modular approach to a digital 60-channel transmultiplexer using directional filters", IEEE Trans. Communications, Bd.COM-30, S.1598-1613, Juli 1982.
- [89] J.A. Nossek und H.-D. Schwartz, "Wave digital lattice filters with applications in communication systems", Proc. 1983 IEEE Int. Symp. Circuits and Syst., Bd.2, S.845-848, Newport Beach, CA, Mai 1983.
- [90] L. Gazsi und H. Dawei, "DTMF band split filters realized by wave digital filters", Proc. of the sixth European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD'83), S.221-223, Stuttgart, September 1983.
- [91] L. Gazsi, "Single-path transmultiplexer schema with multirate wave digital filters", IEEE Int. Conf. on Communications, Bd.2, S.675-678, Amsterdam, Mai 1984.
- [92] L. Gazsi, "Single chip filter bank with wave digital filters", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Bd.ASSp-30, No.5, S.709-718, Oktober 1982.

- [93] A. Fettweis, "Principles for multiplier-free single-way PCM-FDM and audio/FDM conversion", Arch. Elektr. Übertr., Bd.32, S.441-446, November 1978.
- [94] A. Fettweis, "Multiplier-free modulation schemas for PCM/FDM and audio/FDM conversion", Arch. Elektr. Übertr., Bd. 32, S.477-485, Dezember 1978.
- [95] H. Bulling, "Diskrete Optimierung der Multipliziererkoeffizienten von allgemeinen Digitalfilterstrukturen", Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, 1986.

Anhang

Bestimmung der Grenzen des verfügbaren Spielraumes für Tiefpaßfilter

Die Dämpfungsanforderungen eines Tiefpasses im Referenzbereich werden in Bild A.1 angegeben.



A_s – minimal zulässige Dämpfung im Sperrbereich
 A_p – maximal zulässige Dämpfung im Durchlaßbereich
 φ_{lp} – Grenzfrequenz des Durchlaßbereiches
 φ_{ls} – Grenzfrequenz des Sperrbereiches

Bild A.1 Dämpfungsanforderungen eines Tiefpasses im Referenzbereich.

Wir benutzen die folgende Größe für das Verhältnis φ_{lsx} zu φ_{lpz}

$$\Omega_x = \frac{\varphi_{lsx}}{\varphi_{lpz}} \quad , \quad (A.1a)$$

wobei

$$\varphi_{lp} \leq \varphi_{lpz} < \varphi_{lsx} \leq \varphi_{ls} \quad . \quad (A.1b)$$

gilt. Die Größe Ω_x hat seinen maximalen Wert Ω_{max} für $\varphi_{lsx} = \varphi_{ls}$ und $\varphi_{lpz} = \varphi_{lp}$, d.h.,

$$\Omega_{max} = \frac{\varphi_{ls}}{\varphi_{lp}} \quad . \quad (A.2)$$

Ausgehend von Ω_{max} läßt sich der notwendige Grad n_{min} für Butterworth-, Tschebyscheff- und Cauerparameterfilter durch

$$n_{min} = \frac{c_1 \ln(c_2 \varepsilon_s / \varepsilon_p)}{\ln(c_3)} \quad (A.3)$$

bestimmen, wobei

$$\varepsilon_s = \sqrt{10^{A_s/10} - 1} \quad , \quad \varepsilon_p = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} \quad (A.4a, b)$$

die Rippelfaktoren und c_1, c_2, c_3 in der Tabelle A.1 mit

$$k_0 = \sqrt{\Omega_{max}} \quad , \quad k_{i+1} = k_i^2 + \sqrt{k_i^4 - 1} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (A.5a, b)$$

angegeben sind [15]. Für Cauerparameterfilter ist die Bestimmung von c_3 durch (A.5) hinreichend genau.

TABELLE A.1

Filtertyp	c_1	c_2	c_3
<i>Butterworth</i>	1	1	k_o^2
<i>Tschebyscheff</i>	1	2	k_1
<i>Cauerparameter</i>	8	4	$2k_4$

Der Grad N des Tiefpasses wird durch $N \geq n_{min}$ gewählt, wobei N eine positive ganze Zahl ist. Für Brücken-Wellendigitalfilter ist N eine positive ungerade Zahl. Durch diese Wahl von N entsteht ein gewisser Spielraum. Durch die Ausnutzung dieses Spielraumes läßt sich für Ω_x ein minimal zulässiger Wert Ω_{min} bestimmen. Wenn wir in (A.3) n_{min} durch N ersetzen, erhalten wir

$$c'_3 = e^m \quad \text{mit} \quad m = \frac{c_1 \ln(c_2 \varepsilon_s / \varepsilon_p)}{N} . \quad (A.6a, b)$$

Der für den gewählten Wert von N minimal erreichbare Wert Ω_{min} von Ω_x kann für verschiedene Filtertypen wie folgt bestimmt werden:

Butterworthfilter:

$$\Omega_{min} = c'_3 \quad (A.7)$$

Tschebyschefffilter:

$$\Omega_{min} = 0.5 \left(c'_3 + \frac{1}{c'_3} \right) \quad (A.8)$$

Cauerparameterfilter:

$$\Omega_{min} = q_o^2 \quad (A.8a)$$

$$q_4 = 0.5c'_3 \quad , \quad q_{i-1} = \sqrt{0.5 \left(q_i + \frac{1}{q_i} \right)} \quad , \quad i = 4, 3, 2, 1 \quad . \quad (A.9b, c)$$

Damit ist der verfügbare Bereich von Ω_x für ein Tiefpaßfilter durch

$$\Omega_{min} \leq \Omega_x \leq \Omega_{max} \quad (A.10)$$

bestimmt.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. A. Fettweis dafür danken, daß er durch wertvolle Anregungen und zahlreiche Diskussionen diese Arbeit sehr gefördert hat.

Mein Dank gilt auch Herrn Dr. L. Gazsi für viele interessante Diskussionen.

Ich danke ferner Herrn Prof. Dr. H. Wupper für die Übernahme des Korreferats.

Lebenslauf

30. 5. 1955 geboren in Istanbul/Türkei
- 1962-1967 Volksschule in Istanbul Sp. Mesrop
- 1967-1973 Gymnasium Istanbul/Bakirköy
- 1973-1976 Studium der Elektrotechnik an der
Technischen Universität Istanbul
- 1976-1981 Studium der Elektrotechnik an der
Ruhr-Universität Bochum
14. 9. 1981 Diplom-Hauptprüfung
- seit Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl
1. 12 1981 für Nachrichtentechnik der
Ruhr-Universität Bochum

